ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ

Глава IX

ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE

CHAPITRE 9
GROUPES DE LIE RÉELS COMPACTS

MASSON
Paris New York Barcelone Milan Mexico Rio de Janeiro
1982

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ

КОМПАКТНЫЕ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ГРУППЫ ЛИ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
И. А. КОСТРИКИНА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
А. А. КИРИЛЛОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА 1986

ББК 22.144
Б91
УДК 512.81

Бурбаки Н.

Б91 Группы и алгебры Ли, гл. IX: Пер. с франц.— М.: Мир, 1986.— 174 с.

Очередной том известной серии «Элементы математики», созданной группой французских математиков, выступающих под псевдонимом Н. Бурбаки. Предыдущие главы «Групп и алгебр Ли» вышли в издательстве «Мир» в 1972, 1976 и 1978 гг. Данная книга содержит обширный материал по компактным вещественным группам Ли.

Для математиков различных специальностей, физиков, аспирантов и сотрудников университетов.

Б $\frac{1702030000-141}{041(01)-86}$ 11—86, ч. 1 ББК 22.144

Редакция литературы по математическим наукам

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Девятая глава книги «Группы и алгебры Ли» трактата Н. Бурбаки посвящена компактным группам Ли и их конечномерным представлениям. Предыдущие восемь глав уже переведены на русский язык (они вышли в издательстве «Мир» в 1972 (гл. IV—VI), 1976 (гл. I—III) и 1978 (гл. VII, VIII) гг.).

Ссылки на уже переведенные части трактата Н. Бурбаки заменены ссылками на соответствующие русские издания; в остальных случаях сохранены ссылки на французские издания.

Я благодарен Н. Бурбаки, приславшему исправления замеченных при переводе ошибок и неточностей в тексте упражнений.

А. Кириллов

ГЛАВА IX

КОМПАКТНЫЕ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ГРУППЫ ЛИ [1])

В этой главе выражение «группа Ли» означает «группа Ли конечной размерности над полем вещественных чисел», выражение «алгебра Ли» означает, если не оговорено противное, «алгебра Ли конечной размерности над полем вещественных чисел», а выражение «вещественная алгебра Ли» (соотв. *«комплексная алгебра Ли»*) *означает «алгебра Ли конечной размерности над полем вещественных чисел»* (соотв. *«...комплексных чисел»*).

Через G_0 обозначается связная компонента единицы (*нейтральная компонента*) *топологической группы G, через $C(G)$ — центр этой группы, через $D(G)$ — ее производная группа* (*или коммутант*), *а через $N_G(H)$ или $N(H)$* (соотв. *$Z_G(H)$ или $Z(H)$*) — *нормализатор* (соотв. *централизатор*) *подмножества H в группе G.*

§ 1. Компактные алгебры Ли

1. *Инвариантные эрмитовы формы*

В этом пункте k обозначает поле $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Пусть V — конечномерное векторное k-пространство, Φ — невырожденная положительная эрмитова форма на V [2]), G — группа, $\mathfrak{g}$ — некоторая $\mathbf{R}$-алгебра Ли, $\rho: G \to \mathbf{GL}(V)$ — гомоморфизм групп и $\varphi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ — гомоморфизм $\mathbf{R}$-алгебр Ли.

а) Форма Φ инвариантна относительно G (соотв. $\mathfrak{g}$) тогда и только тогда, когда эндоморфизм $\rho(\mathfrak{g})$ *унитарен* относительно Φ для любого $g \in G$ (соотв. $\varphi(x)$ *антиэрмитов* [3])) относительно Φ для любого $x \in \mathfrak{g}$). Действительно, обозначим символом a^* эндоморфизм, сопряженный относительно Φ к эндоморфизму a пространства V; для $g \in G$, $x \in \mathfrak{g}$, u и v из V имеем

$$\Phi(\rho(g)u, \rho(g)v) = \Phi(\rho(g)^* \rho(g)u, v),$$

$$\Phi(\varphi(x)u, v) + \Phi(u, \varphi(x)v) = \Phi((\varphi(x) + \varphi(x)^*).\ u, v).$$

---

[1]) Во всей этой главе ссылка вида *Alg.*, chap. VIII (chap. IX), означает гл. VIII (гл. IX) нового французского издания, которая готовится к печати.

[2]) Напомним (*Alg.*, chap. IX (см. также *Алг.*, 1966, гл. IX, § 1. — *Перев.*)), что эрмитова форма H на V называется *невырожденной*, если для любого ненулевого элемента u из V существует $v \in V$, такой, что $H(u, v) \neq 0$.

[3]) Говорят, что $a \in \operatorname{End}(V)$ антиэрмитов относительно Φ, если сопряженный к нему относительно Φ эндоморфизм a^* равен $-a$. В случае $k = \mathbf{C}$ (соотв. $k = \mathbf{R}$) это означает также, что эндоморфизм ia пространства V (соотв. $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} V$) эрмитов.

Для того чтобы $\Phi(\rho(g)u, \rho(g)v)=\Phi(u, v)$ для всех u, v из V, необходимо и достаточно выполнение условия $\rho(g)^*\rho(g)=\mathrm{Id}_V$; аналогично, чтобы $\Phi(\varphi(x)u, v)+\Phi(u, \varphi(x)v)=0$ для всех u и v из V, необходимо и достаточно выполнение условия $\varphi(x)+\varphi(x)^*=0$, откуда следует доказываемое утверждение.

б) Если форма Φ инвариантна относительно G (соотв. $\mathfrak{g}$), то ортогональное дополнение к устойчивому подпространству в V устойчиво; в частности, представление ρ (соотв. φ) полупросто (см. *Alg.*, chap. IX); кроме того, для любого $g \in G$ (соотв. любого $x \in \mathfrak{g}$) эндоморфизм $\rho(g)$ (соотв. $\varphi(x)$) пространства V полупрост и его собственные значения по модулю равны 1 (соотв. чисто мнимы); таким образом, $\rho(g)$ унитарен (соотв. $i\varphi(x)$ эрмитов, см. *Alg.*, chap. IX).

в) Пусть $k=\mathbf{R}$. Если G — связная группа Ли, ρ — морфизм групп Ли, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G и φ — гомоморфизм, отвечающий ρ, то Φ инвариантна относительно G тогда и только тогда, когда она инвариантна относительно $\mathfrak{g}$ (гл. III, § 6, n° 5, следствие 3).

г) Для существования на V инвариантной относительно G невырожденной положительной эрмитовой формы необходимо и достаточно, чтобы подгруппа $\rho(G)$ в $\mathbf{GL}(V)$ была относительно компактной (*Интегр.*, гл. VII, § 3, n° 1, предложение 1).

2. *Связные коммутативные вещественные группы Ли*

Пусть G — связная коммутативная (вещественная) группа Ли. Экспоненциальное отображение

$$\exp_G\colon L(G) \to G$$

является сюръективным морфизмом групп Ли с дискретным ядром (гл. III, § 6, n° 4, предложение 11), который наделяет $L(G)$ структурой связной накрывающей группы Ли G.

а) Следующие условия эквивалентны: G односвязна, $\exp_G$ является изоморфизмом, G изоморфна $\mathbf{R}^n$ ($n=\dim G$). Если в этом случае при помощи изоморфизма $\exp_G$ перенести на группу G структуру векторного пространства $L(G)$, то G наделяется структурой векторного пространства, которая является единственной такой структурой, согласованной со структурой группы и топологией на G. Односвязные коммутативные группы Ли называются *векторными* группами (Ли); если специально не оговорено противное, будем в дальнейшем считать их наделенными структурой векторного $\mathbf{R}$-пространства указанным выше способом.

б) Обозначим через $\Gamma(G)$ ядро отображения $\exp_G$. Согласно *Top. gen.*, chap. VII, p. 4, th. 1, группа G компактна тогда и только тогда, когда $\Gamma(G)$ — *решетка* в $L(G)$, т. е. (см. *там же*) когда ранг свободного $\mathbf{Z}$-модуля $\Gamma(G)$ равен размерности G. Обратно, если L — конечномерное векторное $\mathbf{R}$-пространство и Γ — решетка в L, то топологическая факторгруппа L/Γ является связной компактной коммутативной группой Ли.

Связные компактные коммутативные группы Ли называются *вещественными торами* или (в этой главе) просто *торами*.

в) В общем случае пусть E — векторное подпространство в $L(G)$, порожденное $\Gamma(G)$, и пусть V — его дополнительное подпространство. Тогда G является прямым произведением своих подгрупп Ли $\exp(E)$ и $\exp(V)$; первая является тором, а вторая — векторной группой. Наконец, любая компактная подгруппа в G содержится в $\exp(E)$ (поскольку ее проекция в $\exp(V)$ обязательно равна единичному элементу); таким образом, подгруппа $\exp(E)$ является единственной *максимальной* компактной подгруппой в G.

Рассмотрим, например, $G=\mathbf{C}^*$; отождествим $L(G)$ с $\mathbf{C}$, так что экспоненциальным отображением для G будет $x \mapsto e^x$. Тогда $\Gamma(G)=2\pi i\mathbf{Z}$, $E=i\mathbf{R}$ и $\exp(E)=\mathbf{U}$. Если положить $V=\mathbf{R}$, то $\exp(V)=\mathbf{R}_+^*$, и мы получаем изоморфизм $\mathbf{C}^* \to \mathbf{U}\times\mathbf{R}_+^*$, построенный в *Общ. топ.* 1975, гл. VIII, § 1, n° 3.

г) Отметим, наконец, что $\exp_G: L(G) \to G$ является универсальным накрытием группы G и, следовательно, $\Gamma(G)$ естественным образом отождествляется с фундаментальной группой группы G.

3. Компактные алгебры Ли

Предложение 1. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — (*вещественная*) *алгебра Ли. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathfrak{g}$ *изоморфна алгебре Ли некоторой компактной группы Ли.*

(ii) *Группа* $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ (гл. III, § 6, n° 2, определение 2) *компактна.*

(iii) *На* $\mathfrak{g}$ *существует инвариантная билинейная форма* (гл. I, § 3, n° 6), *которая невырожденна, положительна и симметрична.*

(iv) $\mathfrak{g}$ *редуктивна* (гл. I, § 6, n° 4, определение 4). *Для любого* $x\in\mathfrak{g}$ *эндоморфизм* $\mathrm{ad}\,x$ *полупрост и имеет чисто мнимые собственные значения.*

(v) $\mathfrak{g}$ *редуктивна, и ее форма Киллинга* B *отрицательна.*

(i) $\Rightarrow$ (ii). Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли компактной группы Ли G, то группа $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ отделима и изоморфна факторгруппе компактной группы G_0 (гл. III, § 6, n° 4, следствие 4); значит, она компактна.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Если группа $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ компактна, то на $\mathfrak{g}$ существует симметрическая билинейная форма, которая невырожденна, положительна и инвариантна относительно $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ (n° 1) и, таким образом, инвариантна относительно присоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Если (iii) выполнено, то присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ полупросто (n° 1), а следовательно, $\mathfrak{g}$ редуктивна; кроме того, эндоморфизмы $\mathrm{ad}\,x$ для $x\in\mathfrak{g}$ обладают требуемыми свойствами (n° 1).

(iv) $\Rightarrow$ (v). Для любого $x\in\mathfrak{g}$ имеем $B(x, x)=\mathrm{Tr}((\mathrm{ad}\,x)^2)$; таким образом, $B(x, x)$ является суммой квадратов собственных значений оператора $\mathrm{ad}\,x$ и, следовательно, отрицательна, если эти значения чисто мнимые.

(v) $\Rightarrow$ (i). Пусть $\mathfrak{g}$ редуктивна, т. е. является произведением коммутативной подалгебры $\mathfrak{c}$ и полупростой подалгебры $\mathfrak{s}$ (гл. I, § 6, n° 4, предложение 5). Форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{s}$ является ограничением на $\mathfrak{s}$

формы B, т. е. невырожденной и отрицательной, если B отрицательна. Подгруппа $\mathrm{Int}(\mathfrak{s})$ в $\mathbf{GL}(\mathfrak{s})$ замкнута (является связной компонентой единицы в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{s})$, гл. III, § 10, n° 2, следствие 2) и оставляет инвариантной невырожденную положительную форму $-B$; следовательно, она компактна, и $\mathfrak{s}$ изоморфна алгебре Ли компактной группы Ли $\mathrm{Int}(\mathfrak{s})$. Кроме того, так как $\mathfrak{c}$ коммутативна, она изоморфна алгебре Ли тора T. Таким образом, $\mathfrak{g}$ изоморфна алгебре Ли компактной группы Ли $\mathrm{Int}(\mathfrak{s})\times T$.

Определение 1. *Компактной* [1]) *алгеброй Ли называется любая алгебра Ли, удовлетворяющая условиям* (i) — (v) *предложения* 1.

Таким образом, компактная алгебра Ли является произведением коммутативной алгебры на компактную полупростую алгебру. Другими словами, чтобы алгебра Ли была компактной, необходимо и достаточно, чтобы она была редуктивной, а ее производная алгебра была компактной.

Алгебра Ли компактной группы Ли компактна.

Предложение 2. а) *Произведение конечного числа алгебр Ли является компактной алгеброй Ли тогда и только тогда, когда каждый сомножитель компактен.*

б) *Подалгебра компактной алгебры Ли компактна.*

в) *Пусть $\mathfrak{b}$ — идеал компактной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ компактна и расширение $\mathfrak{b}\to\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ тривиально.*

Утверждения а) и б) следуют из условия (iii) предложения 1. Часть в) следует из а) и из того факта, что в редуктивной алгебре Ли все идеалы являются прямыми сомножителями (гл. I, § 6, n° 4, следствие предложения 5).

Предложение 3. *Пусть G — группа Ли, такая, что группа ее связных компонент конечна. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *Алгебра Ли $L(G)$ компактна.*

(ii) *Группа $\mathrm{Ad}(G)$ компактна.*

(iii) *На $L(G)$ существует невырожденная положительная симметрическая билинейная форма, инвариантная относительно присоединенного представления группы Ли G.*

*(iv) *На G существует риманова метрика, инвариантная относительно левых и правых сдвигов.**

(i) $\Rightarrow$ (ii). Если $L(G)$ компактна, то группа $\mathrm{Ad}(G_0)=\mathrm{Int}(L(G))$ компактна; поскольку она имеет конечный индекс в $\mathrm{Ad}(G)$, последняя группа также компактна.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Это следует из n° 1.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Так как $\mathrm{Int}(L(G))\subset\mathrm{Ad}(G)$, то утверждение вытекает из п. (iii) предложения 1.

---

[1]) Отметим, что вещественное топологическое векторное пространство может быть компактным топологическим пространством, только если оно нулевое.

(iii)$\Leftrightarrow$(iv). Это следует из гл. III, § 3, n° 13.

4. Группы с компактными алгебрами Ли

Теорема 1 (Г. Вейль). *Пусть G — связная группа Ли, алгебра Ли которой компактна и полупроста. Тогда G компактна и ее центр конечен.*

Поскольку G полупроста, ее центр D дискретен. Кроме того, факторгруппа G/D изоморфна $\mathrm{Ad}(G)$ (гл. III, § 6, n° 4, следствие 4), а значит, компактна (предложение 3). Наконец, G/D совпадает со своей производной группой (гл. III, § 9, n° 2, следствие предложения 4). Таким образом, теорема вытекает из предложения 5 из *Интегр.*, гл. VII, § 3, n° 2.

Предложение 4. *Пусть G — связная группа Ли с компактной алгеброй Ли. Существуют тор T, односвязная полупростая компактная группа Ли S, векторная группа V и сюръективный морфизм с конечным ядром $f: V\times T\times S \to G$. Если G компактна, то группа V состоит лишь из единичного элемента.*

Пусть C (соотв. S) — односвязная группа Ли, алгебра Ли которой изоморфна центру (соотв. производной алгебре) алгебры Ли $L(G)$. Тогда C — векторная группа, S — компактная группа с конечным центром (теорема 1) и G отождествляется с факторгруппой $C\times S$ по дискретной подгруппе D, которая центральна (*Интегр.*, гл. VII, § 3, n° 2, лемма 4). Поскольку образ D при отображении в S централен и, следовательно, конечен, то $D\cap C$ — подгруппа конечного индекса в D. Пусть C' — векторное подпространство в C, порожденное $D\cap C$, и V — дополнительное подпространство. Тогда группа $T=C'/(D\cap C)$ является тором, и G изоморфна факторгруппе произведения $V\times T\times S$ по некоторой конечной группе.

Если G компактна, то компактно и произведение $V\times T\times S$ (*Общ. топ.*, 1969, гл. III, § 4, n° 1, следствие 2 предложения 2), а следовательно, группа V компактна, откуда $V=\{e\}$.

Следствие 1. *Пусть G — связная компактная группа Ли. Тогда $C(G)_0$ — тор, $D(G)$ — компактная полупростая связная группа Ли и морфизм $(x, y)\mapsto xy$ из $C(G)_0\times D(G)$ в G является конечным накрытием.*

В обозначениях предложения 4 $V=\{e\}$ и подгруппы $f(T)$ и $f(S)$ в G компактны и, значит, замкнуты. Поэтому достаточно показать, что $f(T)=C(G)_0$, $f(S)=D(G)$. Имеем $L(G)=L(f(T))\times L(f(S))$. Поскольку S полупроста, а T коммутативна, $L(f(T))=\mathscr{C}(L(G))=L(C(G)_0)$ (гл. III, § 9, n° 3, предложение 8) и $L(f(S))=\mathscr{D}L(G)=L(D(G))$ (гл. III, § 9, n° 2, следствие предложения 4), откуда следует доказываемое утверждение.

Следствие 2. *Центр и фундаментальная группа полупростой связной компактной группы Ли конечны, а ее универсальная накрывающая компактна.*

В обозначениях предложения 4 группы V и T состоят лишь из единичного элемента; таким образом, S является универсальной накрывающей группы Ли G, и фундаментальная группа группы Ли G изоморфна $\operatorname{Ker} f$, а следовательно, конечна. Поскольку G полупроста, ее центр D дискретен и, значит, конечен.

Следствие 3. *Фундаментальная группа связной компактной группы Ли G является $\mathbf{Z}$-модулем конечного типа, и ее ранг равен размерности $C(G)$.*

Действительно, в обозначениях следствия 1 фундаментальная группа группы Ли $C(G)_0$ изоморфна $\mathbf{Z}^n$, где $n = \dim C(G)_0$, а фундаментальная группа группы Ли $D(G)$ конечна (следствие 2).

Следствие 4. *Пусть G — связная компактная группа Ли. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *G полупроста;*

(ii) *$C(G)$ конечна;*

(iii) *$\pi_1(G)$ конечна.*

Если G односвязна, то она полупроста.

Это вытекает из следствий 1—3.

Следствие 5. *Пусть G — связная компактная группа Ли. Тогда* $\operatorname{Int}(G)$ *— связная компонента единицы группы Ли* $\operatorname{Aut}(G)$ (гл. III, § 10, n° 2).

Пусть $f \in \operatorname{Aut}(G)_0$. Тогда f индуцирует автоморфизм f_1 группы $C(G)_0$ и автоморфизм f_2 группы $D(G)$ и $f_1 \in \operatorname{Aut}(C(G)_0)_0$, $f_2 \in \operatorname{Aut}(D(G))_0$. Поскольку группа $\operatorname{Aut}(C(G)_0)$ дискретна (*Top. gen.*, chap. VII, p. 15, prop. 5), то $f_1 = \mathrm{Id}$; поскольку $D(G)$ полупроста, то, согласно следствию 2 теоремы 1 из гл. III, § 10, n° 2, существует элемент g из $D(G)$, такой, что $f_2(x) = gxg^{-1}$ для всех $x \in D(G)$. Для любого $x \in C(G)_0$ имеем $gxg^{-1} = x = f_1(x)$; так как $G = C(G)_0 . D(G)$, то из этого следует, что $gxg^{-1} = f(x)$ для всех $x \in G$; таким образом, $f \in \operatorname{Int}(\mathfrak{g})$.

Предложение 5. *Пусть G — группа Ли с компактной алгеброй Ли.*

а) *Предположим, что G связна. Тогда существует наибольшая компактная подгруппа K в G, которая связна. Существует замкнутая центральная векторная* (n° 2) *подгруппа N в G, такая, что G является прямым произведением $N \times K$.*

б) *Предположим, что группа связных компонент группы G конечна. Тогда*

(i) *Любая компактная подгруппа в G содержится в максимальной компактной подгруппе.*

(ii) *Если K_1 и K_2 — две максимальные компактные подгруппы в G, то существует $g \in G$, такой, что $K_2 = gK_1g^{-1}$.*

(iii) *Пусть K — максимальная компактная подгруппа в G. Тогда $K \cap G_0$ совпадает с K_0; это наибольшая компактная подгруппа в G_0.*

(iv) *Существует замкнутая центральная векторная подгруппа N в G_0, нормальная в G и такая, что для любой максимальной компактной подгруппы K в G группа Ли G_0 является прямым произведением K_0 на N, а G — полупрямым произведением K на N.*

а) Используем обозначения предложения 4. Проекция $\operatorname{Ker} f$ на V является конечной подгруппой векторной группы V и, значит, совпадает с единичным элементом. Из этого следует, что $\operatorname{Ker} f$ содержится в $T \times S$, а также что G является прямым произведением векторной группы $N = f(V)$ и компактной группы $K = f(T \times S)$. Проекция любой компактной подгруппы группы Ли G в N совпадает с единичным элементом, и, следовательно, эта подгруппа содержится в K. Это доказывает а).

б) Предположим теперь, что группа G/G_0 конечна. Согласно а), G_0 является прямым произведением своей наибольшей компактной подгруппы M на векторную подгруппу P; очевидно, что подгруппа M в G нормальна. Пусть $\mathfrak{n}$ — векторное подпространство в $L(G)$, дополнительное к подпространству $L(M)$ и устойчивое относительно присоединенного представления группы G (n° 1 и n° 3, предложение 3); тогда $\mathfrak{n}$ — идеал в $L(G)$ и $L(G) = L(M) \times \mathfrak{n}$. Пусть N — интегральная подгруппа в G с алгеброй Ли $\mathfrak{n}$; согласно предложению 14 из гл. III, § 6, n° 6, она нормальна в G. Проекция из $L(G)$ в $L(P)$ с ядром $L(M)$ индуцирует изоморфизм $\mathfrak{n}$ на $L(P)$; из этого следует, что проекция G_0 на P индуцирует этальный морфизм N на P; поскольку P односвязна, это изоморфизм, и N — векторная подгруппа. Морфизм $(x, y) \mapsto xy$ из $M \times N$ в G_0 является инъективным (поскольку $M \cap N$ равно единичному элементу) этальным морфизмом, а следовательно, изоморфизмом. Из этого вытекает, что N — *замкнутая* подгруппа в G и что факторгруппа G/N компактна, поскольку G_0/N компактна, а G/G_0 конечна (*Общ. топ.*, 1969, гл. III, § 4, n° 1, следствие 2 предложения 2).

Согласно предложению 3 из *Интегр.*, гл. VII, § 3, n° 2, любая компактная подгруппа в G содержится в максимальной компактной подгруппе, все максимальные компактные подгруппы в G сопряжены и для любой максимальной компактной подгруппы K в G группа Ли G является полупрямым произведением K на N. Поскольку G_0 содержит N, то она является полупрямым произведением N на $G_0 \cap K$; из этого следует, что $G_0 \cap K$ связна и, значит, совпадает с K_0; так как $K/(G_0 \cap K)$ изоморфна G/G_0, то она конечна; наконец, очевидно, что K_0 является наибольшей компактной подгруппой в G_0 согласно а).

Следствие. *Если N удовлетворяет условиям* б) (iv) *и если K_1 и K_2 — две максимальные компактные подгруппы в G, то существует элемент $n \in N$, такой, что $nK_1 n^{-1} = K_2$.*

Действительно, согласно (ii), существует элемент $g \in G$, такой, что $gK_1 g^{-1} = K_2$; согласно (iv), существуют $n \in N$ и $k \in K_1$, такие, что $g = nk$. Таким образом, элемент n обладает требуемым свойством.

§ 2. Максимальные торы компактных групп Ли

1. Подалгебры Картана компактных алгебр Ли

Лемма 1. *Пусть G — группа Ли, K — компактная подгруппа в G и F — инвариантная билинейная форма на $L(G)$. Пусть $x, y \in L(G)$. Существует элемент k из K, такой, что для всех $u \in L(K)$ имеем $F(u, [(\mathrm{Ad}\, k)(x), y]) = 0$.*

Функция $v \mapsto F((\mathrm{Ad}\, v)(x), y)$ из K в $\mathbf{R}$ непрерывна и, следовательно, имеет минимум в некоторой точке $k \in K$. Пусть $u \in L(K)$; положим

$$h(t) = F((\mathrm{Ad}\exp(tu).k)(x), y), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Для всех t имеем $h(t) \geqslant h(0)$. С другой стороны, согласно предложению 44 из гл. III, § 3, n° 12, имеем

$$\frac{dh}{dt}(0) = F([u, (\mathrm{Ad}\, k)(x)], y) = F(u, [(\mathrm{Ad}\, k)(x), y]),$$

откуда следует доказательство леммы (*FVR*, chap. I, p. 20, prop. 7).

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — компактная алгебра Ли. Подалгебры Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$* (гл. VII, § 2, n° 1, определение 1) *являются ее максимальными коммутативными подалгебрами; в частности, $\mathfrak{g}$ является объединением своих подалгебр Картана. Группа* $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ *действует транзитивно на множестве подалгебр Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

Поскольку $\mathfrak{g}$ редуктивна, ее подалгебры Картана коммутативны (гл. VII, § 2, n° 4, следствие 3 теоремы 2). Обратно, пусть $\mathfrak{t}$ — коммутативная подалгебра в $\mathfrak{g}$. Согласно предложению 1 из § 1, n° 3, эндоморфизм $\mathrm{ad}\, x$ полупрост для всех $x \in \mathfrak{t}$. Согласно предложению 10 из гл. VII, § 2, n° 3, существует подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathfrak{t}$. Это доказывает первое утверждение теоремы.

Пусть $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{t}'$ — две подалгебры Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Докажем, что существует автоморфизм $u \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, такой, что $u(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}'$. Согласно предложению 1 из § 1, n° 3, можно предполагать, что $\mathfrak{g}$ имеет вид $L(G)$, где G — связная компактная группа Ли, и на $\mathfrak{g}$ можно выбрать невырожденную инвариантную симметрическую билинейную форму F. Пусть x (соотв. x') — регулярный элемент алгебры $\mathfrak{g}$, такой, что $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}^0(x)$ (соотв. $\mathfrak{t}' = \mathfrak{g}^0(x')$) (гл. VII, § 3, n° 3, теорема 2). Применяя лемму 1 при $K = G$, видим, что существует такой элемент $k \in G$, что элемент $[(\mathrm{Ad}\, k)(x), x']$ ортогонален $\mathfrak{g}$ относительно F и, стало быть, равен нулю. Таким образом, $(\mathrm{Ad}\, k)(x) \in \mathfrak{g}^0(x') = \mathfrak{t}'$ и, следовательно, $\mathfrak{g}^0((\mathrm{Ad}\, k)(x)) = \mathfrak{t}'$, поскольку эле-

мент $(\mathrm{Ad}\,k)(x)$ регулярен. Мы приходим к заключению, что $(\mathrm{Ad}\,k)(\mathfrak{t})=\mathfrak{t}'$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $\mathfrak{t}$ *и* $\mathfrak{t}'$ *— две подалгебры Картана в* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ *— подмножество в* $\mathfrak{t}$, u *— автоморфизм алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *переводящий* $\mathfrak{a}$ *в* $\mathfrak{t}'$. *Существует элемент* v *из* $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, *такой, что* $u\circ v$ *отображает* $\mathfrak{t}$ *на* $\mathfrak{t}'$ *и совпадает с* u *на* $\mathfrak{a}$.

Положим $G=\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ и рассмотрим стабилизатор $Z_G(\mathfrak{a})$ подмножества $\mathfrak{a}$ в G; это подгруппа Ли в G с алгеброй Ли $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$, состоящей из тех элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, которые перестановочны со всеми элементами множества $\mathfrak{a}$ (гл. III, § 9, n° 3, предложение 7). Тогда $\mathfrak{t}$ и $u^{-1}(\mathfrak{t}')$ — две подалгебры Картана компактной алгебры Ли $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$. Согласно теореме 1, существует элемент v из $Z_G(\mathfrak{a})$, такой, что $v(\mathfrak{t})=u^{-1}(\mathfrak{t}')$. Этот элемент обладает нужными свойствами.

2. Максимальные торы

Пусть G — группа Ли. *Тором* в G называется любая замкнутая подгруппа этой группы Ли, являющаяся тором (§ 1, n° 2), т. е. любая коммутативная связная компактная подгруппа. Максимальные элементы множества торов в группе G, упорядоченного по включению, называются *максимальными торами* в G.

Теорема 2. *Пусть G — связная компактная группа Ли.*

а) *Алгебры Ли максимальных торов в группе Ли G являются подалгебрами Картана в $L(G)$.*

б) *Пусть T_1 и T_2 — два максимальных тора в G. Существует элемент $g\in G$, такой, что $T_2=gT_1g^{-1}$.*

в) *G является объединением своих максимальных торов.*

Пусть $\mathfrak{t}$ — подалгебра Картана в $L(G)$. Интегральная подгруппа в G с алгеброй Ли $\mathfrak{t}$ замкнута (гл. VII, § 2, n° 1, следствие 4 предложения 4) и коммутативна (теорема 1), а следовательно, является тором в G. Если T — максимальный тор в G, то его алгебра Ли коммутативна и, стало быть, содержится в некоторой подалгебре Картана алгебры Ли $L(G)$ (теорема 1). Отсюда следует, что все максимальные торы в группе Ли G суть в точности ее интегральные подгруппы, ассоциированные с подалгебрами Картана алгебры Ли $L(G)$. Утверждение а) доказано. Утверждение б) следует из теоремы 1, поскольку канонический гомоморфизм $G\to\mathrm{Int}(L(G))$ сюръективен (гл. III, § 6, n° 4, следствие 4 предложения 10).

Обозначим через X объединение максимальных торов в группе G, и пусть T — максимальный тор в G. Образом непрерывного отображения $(g,t)\mapsto gtg^{-1}$ из $G\times T$ в G является множество X, которое тем самым *замкнуто* в G. Для доказательства в) достаточно убедиться в том, что X открыто в G. Поскольку X устойчиво относительно внутренних авто-

морфизмов, достаточно показать, что для всех $a \in T$ множество X является окрестностью точки a. Докажем это индукцией по размерности группы Ли G. Рассмотрим два случая:

1) *a не принадлежит центру группы Ли G.* Пусть H — связная компонента единицы централизатора $Z_G(a)$. Это связная компактная подгруппа в G, отличная от G, содержащая T и, стало быть, a. Поскольку эндоморфизм $\mathrm{Ad}\, a$ полупрост (§ 1, n° 1), алгебра Ли подгруппы H является нильпространством эндоморфизма $\mathrm{Ad}\, a - 1$. Из предложения 4 из гл. VII, § 4, n° 2, следует, что множество Y, являющееся объединением подгрупп, сопряженных с H, есть окрестность точки a. Согласно предположению индукции, $H \subset X$ и, следовательно, $Y \subset X$. Таким образом, X — окрестность a.

2) *a принадлежит центру группы Ли G.* Достаточно доказать, что $a \exp x$ принадлежит X для любого x из $L(G)$. Поскольку любой элемент x из $L(G)$ принадлежит некоторой подалгебре Картана алгебры Ли $L(G)$ (теорема 1), то соответствующая интегральная подгруппа T' содержит $\exp x$. Так как подгруппа T' сопряжена с T, то она содержит a и, следовательно, $a \exp x$. Отсюда вытекает требуемое утверждение.

Следствие 1. а) *Экспоненциальное отображение для G сюръективно.*

б) *Для любого $n \geqslant 1$ отображение $g \to g^n$ из G в G сюръективно.*

Действительно, $\exp(L(G))$ содержит все максимальные торы в G, что дает а). Утверждение б) следует тогда из формулы $(\exp x)^n = \exp nx$ для x из $L(G)$.

Замечание 1. Существует *компактное* подмножество K в $L(G)$, такое, что $\exp_G(K) = G$. Действительно, если T — максимальный тор в G, то существует компакт $C \subset L(T)$, для которого $\exp_T(C) = T$; достаточно взять $K = \bigcup_{g \in G} (\mathrm{Ad}\, g)(C)$.

Следствие 2. *Пересечение максимальных торов в группе Ли G является центром этой группы Ли.*

Пусть x — центральный элемент в G. Согласно теореме 2в), существует максимальный тор T в G, содержащий x. Тогда x принадлежит всем торам, сопряженным с T, т. е. всем максимальным торам в группе Ли G. Обратно, если x принадлежит всем максимальным торам в G, то он, согласно теореме 2в), коммутирует со всеми элементами из G.

Следствие 3. *Пусть $g \in G$, и пусть C — его централизатор. Тогда g принадлежит C_0, причем группа C_0 является объединением максимальных торов в G, содержащих g.*

Существует максимальный тор T в G, содержащий g (теорема 2в)) и, следовательно, содержащийся в C_0. С другой стороны, C_0 — связная компактная группа Ли, так что она является объединением своих

максимальных торов (теорема 2в)); все они содержат g (следствие 2), т. е. в точности являются максимальными торами в G, содержащими g.

Следствие 4. *Пусть $g \in G$. Если g — регулярный элемент* (гл. VII, § 4, n° 2, определение 2), *то он принадлежит единственному максимальному тору, который является связной компонентой единицы его централизатора. Если g не регулярен, то он принадлежит бесконечному множеству максимальных торов.*

Поскольку $\operatorname{Ad} g$ полупрост, размерность нильпространства эндоморфизма $\operatorname{Ad} g - 1$ такая же, как и размерность централизатора C элемента g. Согласно теореме 1 и предложению 8 из гл. VII, § 4, n° 2, элемент g регулярен тогда и только тогда, когда C_0 — максимальный тор в G. Используя следствие 3, завершаем доказательство.

Следствие 5. а) *Пусть S — тор в G. Централизатор группы S связен и является объединением максимальных торов в G, содержащих S.*

б) *Пусть $\mathfrak{s}$ — коммутативная подалгебра в $L(G)$. Стабилизатор $\mathfrak{s}$ в G связен и является объединением максимальных торов в G, алгебра Ли которых содержит $\mathfrak{s}$.*

Для доказательства а) достаточно проверить, что если элемент g группы Ли G перестановочен с S, то существует максимальный тор в этой группе Ли, содержащий S и g. Но если C — централизатор элемента g, то $g \in C_0$ (следствие 3) и $S \subset C_0$. Если, далее, T — максимальный тор в связной компактной группе Ли C_0, содержащий S, то $g \in T$ (следствие 2), откуда вытекает а). Утверждение б) следует с учетом предложения 9 из гл. III, § 9, n° 3, из утверждения а), примененного к интегральной подгруппе с алгеброй Ли $\mathfrak{s}$.

Z *Замечание 2.* Из следствия 5 вытекает, что максимальный тор в группе Ли G является ее максимальной коммутативной подгруппой. Обратное неверно: например, в группе Ли $\mathbf{SO}(3, \mathbf{R})$ максимальные торы имеют размерность 1 и, следовательно, не могут содержать подгруппу диагональных матриц, изоморфную группе $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$. С другой стороны, если $g \in \mathbf{SO}(3, \mathbf{R})$ — нескалярная диагональная матрица, то g — регулярный элемент группы $\mathbf{SO}(3, \mathbf{R})$, централизатор которого несвязен (см. следствие 4).

Следствие 6. *Максимальные торы в G являются своими собственными централизаторами и стабилизаторами своих алгебр Ли.*

Пусть T — максимальный тор в G и C — его централизатор. Так как $L(T)$ — подалгебра Картана в $L(G)$, то $L(T) = L(C)$. Следовательно, $C = T$, поскольку C — связная подгруппа (следствие 5).

Следствие 7. *Пусть T и T' — два максимальных тора в G, A — подмножество в T и s — автоморфизм группы G, переводящий A в T'. Существует $g \in G$, такой, что $s \circ (\operatorname{Int} g)$ отображает T на T' и совпадает с s на A.*

Пусть C — централизатор множества A. Тогда T и $s^{-1}(T')$ — два максимальных тора в C_0. Любой элемент g из C_0, такой, что $(\operatorname{Int} g)(T) = s^{-1}(T')$, обладает нужными свойствами.

Следствие 8. *Пусть H — компактная группа Ли и T — максимальный тор в H. Тогда $H = N_H(T).H_0$ и вложение $N_H(T)$ в H индуцирует изоморфизм $N_H(T)/N_{H_0}(T)$ на H/H_0.*

Пусть $h \in H$. Тогда $h^{-1}Th$ — максимальный тор в H_0, и, следовательно (теорема 2), существует элемент $g \in H_0$, такой, что $hg \in N_H(T)$. Таким образом, h принадлежит $N_H(T).H_0$, откуда вытекает первое утверждение. Второе утверждение непосредственно следует из первого.

Замечания. 3) Пусть G — связная группа Ли с компактной алгеброй Ли. Назовем *подгруппами Картана* в G интегральные подгруппы, алгебры Ли которых являются подалгебрами Картана алгебры Ли $L(G)$ (подгруппы Картана связной компактной группы Ли являются ее максимальными торами). Теорема 2 и ее следствия остаются справедливыми для G, если в них всюду заменить выражение «максимальный тор» на выражение «подгруппа Картана». Это следует в силу предложения 5 § 1, n° 4, из того факта, что G является прямым произведением векторной группы V на связную компактную группу K, и из того, что подгруппы Картана в G являются произведениями группы V на максимальные торы в K. Отметим, между прочим, что из следствия 6 этого пункта вытекает также, что подгруппы Картана можно определить как стабилизаторы подалгебр Картана в $L(G)$.

4) Утверждение в) теоремы 2 можно также доказать следующим образом. Будем считать, что G наделена инвариантной римановой метрикой (§ 1, n° 3, предложение 3). Тогда для любого элемента g из G существует максимальная геодезическая, проходящая через g и единичный элемент группы Ли G (теорема Хопфа — Ринова). Проверяется, что замыкание этой геодезической является подтором в группе Ли G.

3. Максимальные торы в подгруппах и в факторгруппах

Предложение 1. *Пусть G и G' — две связные компактные группы Ли.*

а) *Пусть $f\colon G \to G'$ — сюръективный морфизм групп Ли. Максимальные торы в G' являются образами максимальных торов в G при отображении f. Если ядро отображения f центрально в G (например, дискретно), то максимальные торы в G являются в точности прообразами максимальных торов в G' при отображении f.*

б) *Пусть H — связная замкнутая подгруппа в G. Любой максимальный тор в H является пересечением с H некоторого максимального тора в G.*

в) *Пусть H — связная замкнутая нормальная подгруппа в G. Максимальными торами в H являются пересечения с H максимальных торов в G.*

а) Пусть T — максимальный тор в G. Тогда $L(T)$ — подалгебра Картана алгебры Ли $L(G)$ (n° 2, теорема 2а)); следовательно, $L(f(T))$ —

подалгебра Картана алгебры Ли $L(G')$ (гл. VII, § 2, n° 1, следствие 2 предложения 4). Отсюда вытекает, что $f(T)$ — максимальный тор в G' (n° 2, теорема 2а)). Если подгруппа $\operatorname{Ker} f$ центральна в G, то она содержится в T (следствие 2 теоремы 2), т. е. $T = f^{-1}(f(T))$.

Обратно, пусть T' — максимальный тор в G'. Покажем, что в G существует такой максимальный тор T, что $f(T) = T'$. Пусть T_1 — максимальный тор в G. Тогда $f(T_1)$ — максимальный тор в G' и существует элемент $g' \in G'$, для которого $T' = g' f(T_1) g'^{-1}$ (теорема 2б)). Если элемент $g \in G$ таков, что $f(g) = g'$, то для $T = gT_1 g^{-1}$ имеем $T' = f(T)$, $T = f^{-1}(f(T))$.

б) Пусть S — максимальный тор в H. Тогда S — тор в G, и, следовательно, существует максимальный тор T в G, содержащий S. Пересечение $T \cap H$ — коммутативная подгруппа в H, содержащая S и, стало быть, совпадающая с S (n° 2, замечание 2).

в) Согласно предложению 2в) из § 1, n° 3, $L(G)$ является прямым произведением $L(H)$ на некоторый идеал. Подалгебры Картана алгебры Ли $L(H)$ являются, следовательно, пересечениями с $L(H)$ подалгебр Картана алгебры Ли $L(G)$. Для любого максимального тора T в G пересечение $T \cap H$ содержит максимальный тор S в H, и, стало быть, $S = T \cap \mathrm{H}$ (n° 2, замечание 2).

Замечания. 1) Предложение 1 непосредственно обобщается на связные группы с компактной алгеброй Ли. В частности, если G — связная группа Ли с компактной алгеброй Ли, то подгруппы Картана в G (см. замечание 3, n° 2) являются не чем иным, как прообразами (относительно канонического гомоморфизма из G на $\operatorname{Ad}(G)$) максимальных торов связной компактной группы Ли $\operatorname{Ad}(G)$.

2) Пусть G — связная компактная группа Ли, $\tilde{D}(G)$ — универсальная накрывающая группы $D(G)$ и $f\colon \tilde{D}(G) \to G$ — морфизм, являющийся композицией канонических морфизмов из $\tilde{D}(G)$ на $D(G)$ и из $D(G)$ в G. Тогда отображение $T \mapsto f^{-1}(T)$ есть биекция множества максимальных торов в G на множество максимальных торов в $\tilde{D}(G)$. Обратная биекция ставит в соответствие максимальному тору $\tilde{T}$ в $\tilde{D}(G)$ максимальный тор $C(G)_0 . f(\tilde{T})$ в G.

4. Подгруппы максимального ранга

Рангом связной группы Ли G называется ранг ее алгебры Ли, обозначаемый через $\operatorname{rg} G$. Согласно теореме 2а), ранг связной компактной группы Ли равен общей размерности ее максимальных торов.

Пусть G — связная компактная группа Ли и H — замкнутая подгруппа в G. Если H связна, то $\operatorname{rg} H \leqslant \operatorname{rg} G$ (поскольку максимальные торы в H являются торами в G). Согласно теореме 2в), подгруппа *H связна и имеет максимальный ранг* (т. е. ранг, равный $\operatorname{rg} G$), когда она является *объединением максимальных торов в G*. Из предложения 1 тут же выводится

Предложение 2. *Пусть $f\colon G \to G'$ — сюръективный морфизм связных компактных групп Ли, ядро которого лежит в центре. Отображения $H \mapsto f(H)$ и $H' \mapsto f^{-1}(H')$ являются биекциями, устанавливающими взаим-*

но однозначное соответствие между множеством связных замкнутых подгрупп максимального ранга в G и аналогичным множеством для G'.

Предложение 3. *Пусть G — связная компактная группа Ли и H — ее связная замкнутая подгруппа максимального ранга.*

а) *Компактное множество G/H односвязно.*

б) *Гомоморфизм $\pi_1(H) \to \pi_1(G)$, полученный из канонического вложения H в G, сюръективен.*

Поскольку H связна, имеем точную последовательность (*Top. gen.*, chap. XI [1]))

$$\pi_1(H) \to \pi_1(G) \to \pi_1(G/H, \bar{e}) \to 0,$$

где $\bar{e}$ — образ в G/H единичного элемента группы G. Так как G/H связна, из этого сразу же получается эквивалентность утверждений а) и б). С другой стороны, если $f\colon G' \to G$ — сюръективный морфизм связных компактных групп Ли, ядро которого лежит в центре, то безразлично, доказывать ли предложение (в форме а)) для G или для G' (предложение 2). Таким образом, можно сначала заменить G на $\mathrm{Ad}(G)$, т. е. предположить, что G полупроста, а потом заменить G на ее универсальную накрывающую (§ 1, n° 4, следствие 2), т. е. предположить, что G односвязна. Но тогда утверждение б) тривиально.

Предложение 4. *Пусть G — компактная группа Ли, H — связная замкнутая подгруппа в G максимального ранга и N — нормализатор H в G. Тогда H имеет конечный индекс в N и является связной компонентой единицы группы N.*

Действительно, алгебра Ли подгруппы H содержит подалгебру Картана алгебры $L(G)$. Согласно следствию 4 предложения 4 из гл. VII, § 2, n° 1, H есть связная компонента единицы группы N. Поскольку N компактна, H — группа конечного индекса в N.

Замечания. 1) Любая интегральная подгруппа H в G, такая, что $\mathrm{rg}\, H = \mathrm{rg}\, G$, *замкнута*. Действительно, предыдущее доказательство показывает, что H — связная компонента единицы своего нормализатора, который является замкнутой подгруппой в G.

2) В обозначениях предложения 4 любая замкнутая подгруппа H' в G, содержащая H и такая, что индекс $(H' : H)$ конечен, нормализует H и, следовательно, содержится в N; аналогично нормализатор группы H' содержится в N. В частности, N является своим собственным нормализатором.

---

[1]) Ссылка *Top. gen.*, chap. XI, означает гл. XI французского издания, которая готовится к печати.

5. *Группа Вейля*

Пусть G — связная компактная группа Ли и T — максимальный тор в G. Обозначим через $N_G(T)$ нормализатор T в G; согласно предложению 4 (n° 4), факторгруппа $N_G(T)/T$ конечна. Обозначим ее через $W_G(T)$ или $W(T)$ и назовем *группой Вейля* максимального тора T в G или группой Вейля группы G относительно T. Поскольку группа T коммутативна, действие $N_G(T)$ на T, порожденное внутренними автоморфизмами группы Ли G, при переходе к факторгруппе индуцирует действие, называемое *каноническим*, группы $W_G(T)$ на группе Ли T. Согласно следствию 6 теоремы 2 из n° 2, это действие является *точным*: гомоморфизм $W_G(T) \to \operatorname{Aut} T$, который ему соответствует, *инъективен*.

Если T' — другой максимальный тор в G и если элемент $g \in G$ таков, что $\operatorname{Int} g$ отображает T на T' (n° 2, теорема 2б)), то $\operatorname{Int} g$ индуцирует изоморфизм a_g группы $W_G(T)$ на группу $W_G(T')$ и $a_g(s)(gtg^{-1}) = gs(t)g^{-1}$ для всех $s \in W_G(T)$ и всех $t \in T$.

Предложение 5. а) *Любой класс сопряженных элементов в G пересекается с T.*

б) *Пересечения классов сопряженных элементов в G* с тором T *являются орбитами группы Вейля.*

Пусть $g \in G$; согласно теореме 2 из n° 2, существует элемент $h \in G$, такой, что $g \in hTh^{-1}$, откуда следует а). Согласно определению группы Вейля, два элемента, принадлежащие одной орбите группы $W_G(T)$ в T, сопряжены в G. Обратно, пусть a, b — два элемента из T, сопряженные в G. Существует элемент $h \in G$, такой, что $b = hah^{-1}$; применяя следствие 7 теоремы 2 (n° 2) с $A = \{a\}$, $s = \operatorname{Int} h$, $T' = T$, видим, что существует элемент $g \in G$, такой, что $\operatorname{Int} hg$ отображает T в T и a на b. Класс элемента hg в $W_G(T)$ отображает тогда a на b, откуда следует предложение.

Следствие 1. *Каноническое вложение T в G определяет при переходе к факторгруппе гомеоморфизм $T/W_G(T)$ на пространство $G/\operatorname{Int}(G)$ классов сопряженных элементов в G.*

Действительно, это непрерывное и биективное отображение между двумя компактными пространствами (см. Общ. топ., 1969, гл. III, § 4, n° 1, следствие 1 предложения 2).

Следствие 2. *Пусть E — подмножество в G, устойчивое относительно внутренних автоморфизмов. Для того чтобы E было открыто* (соотв. *замкнуто,* соотв. *плотно*) *в G, необходимо и достаточно, чтобы $E \cap T$ было открыто* (соотв. *замкнуто,* соотв. *плотно*) *в T.*

Это вытекает из следствия 1 и из того, что канонические отображения $T \to T/W_G(T)$ и $G \to G/\operatorname{Int}(G)$ являются открытыми (*Общ. топ.*, 1969, гл. III, § 2, n° 4, лемма 2).

Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы Ли G и через $\mathfrak{t}$ алгебру Ли группы Ли T. Действие группы $W_G(T)$ в T определяет представление, называемое *каноническим*, группы $W_G(T)$ в векторном $\mathbf{R}$-пространстве $\mathfrak{t}$.

Предложение 6. а) *Все орбиты группы G в $\mathfrak{g}$ (для присоединенного представления) пересекаются с $\mathfrak{t}$.*

б) *Пересечения орбит группы G с $\mathfrak{t}$ являются орбитами группы $W_G(T)$ в $\mathfrak{t}$.*

Утверждение а) следует из теоремы 1 (n° 1). Пусть x, y — два элемента из $\mathfrak{t}$, принадлежащие одной орбите группы $\mathrm{Ad}(G)$, и пусть $h \in G$ таков, что $(\mathrm{Ad}\, h)(x) = y$. Применяя следствие теоремы 1 (n° 1) для $\mathfrak{a} = \{x\}$, $u = \mathrm{Ad}\, h$, $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t}$, видим, что существует $g \in G$, такой, что $\mathrm{Ad}\, hg$ отображает $\mathfrak{t}$ на $\mathfrak{t}$ и x в y. Таким образом, $hg \in N_G(T)$ (гл. III, § 9, n° 4, предложение 11), и класс элемента hg в $W_G(T)$ переводит x в y, откуда следует предложение.

Следствие. *Каноническое вложение $\mathfrak{t}$ в $\mathfrak{g}$ определяет при переходе к факторалгебрам гомеоморфизм $\mathfrak{t}/W_G(T)$ на $\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}(G)$.*

Обозначим через j это отображение; оно непрерывно и биективно (предложение 6). Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{t} & \xrightarrow{i} & \mathfrak{g} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \mathfrak{t}/W_G(T) & \xrightarrow{j} & \mathfrak{g}/\mathrm{Ad}(G) \end{array},$$

где p и q — отображения перехода к факторалгебре, а i — каноническое вложение. Поскольку i и q — собственные отображения (*Общ. топ.*, 1968, гл. I, § 10, n° 1, предложение 2, 1969, гл. III, § 4, n° 1, предложение 2в) и отображение p сюръективно, то j — собственное [1]) отображение (*Общ. топ.*, 1968, гл. I, § 10, n° 1, предложение 5) и, следовательно, гомеоморфизм.

Предложение 7. *Пусть H — замкнутая подгруппа в G, содержащая T.*

а) *Обозначим через $W_H(T)$ подгруппу $N_H(T)/T$ в $W_G(T)$; группа H/H_0 изоморфна факторгруппе $W_H(T)/W_{H_0}(T)$.*

б) *Для того чтобы группа H была связной, необходимо и достаточно, чтобы любой элемент из $W_G(T)$, имеющий представителя в H, принадлежал $W_{H_0}(T)$.*

Утверждение а) вытекает из следствия 8 теоремы 2 (n° 2), а утверждение б) есть частный случай а).

---

[1]) Здесь, как и в книге «Многообразия. Сводка результатов», термин „application propre“ переводится как «собственное отображение» (в отличие от «Общей топологии», где он переведен как «совершенное отображение»).— *Прим. ред.*

6. *Максимальные торы и подъем гомоморфизмов*

Пусть G — связная компактная группа Ли, а T — максимальный тор в G. Рассмотрим производную группу $D(G)$ группы G и ее универсальную накрывающую $\tilde{D}(G)$; пусть $p: \tilde{D}(G) \to G$ — морфизм, являющийся композицией канонических морфизмов $\tilde{D}(G) \to D(G)$ и $D(G) \to G$. Тогда $\tilde{D}(G)$ — связная компактная группа Ли (§ 1, n° 4, следствие 2 предложения 4); кроме того, прообраз $\tilde{T}$ тора T при отображении p является максимальным тором в $\tilde{D}(G)$ (n° 3, предложение 1).

Лемма 2. *Пусть H — группа Ли, $f_T: T \to H$ и $\tilde{f}: \tilde{D}(G) \to H$ — такие морфизмы групп Ли, что для всех $t \in \tilde{T}$ имеем $f_T(p(t)) = \tilde{f}(t)$. Существует единственный морфизм групп Ли $f: G \to H$, такой, что $f \circ p = \tilde{f}$ и что ограничением f на T является f_T.*

Положим $Z = C(G_0)$. Согласно следствию 1 предложения 4 из § 1, n° 4, морфизм групп Ли $g: Z \times \tilde{D}(G) \to G$, такой, что $g(z, x) = z^{-1}p(x)$, является накрытием; его ядро состоит из пар (z, x), таких, что $p(x) = z$ и, следовательно, $x \in p^{-1}(Z) \subset \tilde{T}$. Поскольку морфизм $(z, x) \mapsto f_T(z^{-1})\tilde{f}(x)$ из $Z \times \times \tilde{D}(G)$ в H переводит Ker g в $\{e\}$, существует морфизм f из G в H, такой, что $f \circ p = \tilde{f}$ и $f(z) = f_T(z)$ для $z \in Z$. Имеем также $f(t) = f_T(t)$ для $t \in p(\tilde{T})$. Поскольку $T = Z.p(\tilde{T})$, ограничение f на T совпадает с f_T.

Предложение 8. *Пусть G — связная компактная группа Ли, T — максимальный тор в G, H — группа Ли и $\varphi: L(G) \to L(H)$ — гомоморфизм алгебр Ли. Для того чтобы существовал морфизм групп Ли $f: G \to H$, такой, что $L(f) = \varphi$, необходимо и достаточно существование такого морфизма групп Ли $f_T: T \to H$, что $L(f_T) = \varphi | L(T)$; тогда $f_T = f | T$.*

Если $f: G \to H$ — такой морфизм групп Ли, что $L(f) = \varphi$, то ограничение f_T морфизма f на T является единственным морфизмом из T в H, таким, что $L(f_T) = \varphi | L(T)$. Обратно, пусть $f_T: T \to H$ — морфизм групп Ли, такой, что $L(f_T) = \varphi | L(T)$. Пусть $\tilde{D}(G)$ и p обозначают то же, что и в начале пункта; отображение $L(p)$ индуцирует изоморфизм $L(\tilde{D}(G))$ на производную алгебру Ли $\mathfrak{b}$ алгебры Ли $L(G)$. Существует морфизм групп Ли $\tilde{f}: \tilde{D}(G) \to H$, такой, что $L(\tilde{f}) = (\varphi | \mathfrak{b}) \circ L(p)$ (гл. III, § 6, n° 1, теорема 1). Морфизмы $t \mapsto \tilde{f}(t)$ и $t \mapsto f_T(p(t))$ из $\tilde{T}$ в H индуцируют один и тот же гомоморфизм алгебр Ли, а следовательно, совпадают. Применяя лемму 2, мы видим, что существует морфизм $f: G \to H$, такой, что $L(f)$ и φ совпадают на $L(T)$ и $\mathfrak{b}$. Поскольку $L(G) = \mathfrak{b} + L(T)$, то $L(f) = \varphi$.

Предложение 9. *Пусть G — связная компактная группа Ли, T — максимальный тор в G, H — группа Ли и $f: G \to H$ — морфизм. Морфизм f инъективен тогда и только тогда, когда его ограничение на T инъективно.*

Действительно, согласно теореме 2 (n° 2), нормальная подгруппа Ker f в G состоит из единичного элемента тогда и только тогда, когда ее пересечение с T состоит из единичного элемента.

§ 3. Компактные формы комплексных полупростых алгебр Ли

1. Вещественные формы

Если $\mathfrak{a}$ — комплексная алгебра Ли, то символом $\mathfrak{a}_{[\mathbf{R}]}$ (или просто $\mathfrak{a}_{\mathbf{R}}$) обозначается вещественная алгебра Ли, полученная ограничением поля скаляров. Если $\mathfrak{g}$ — вещественная алгебра Ли, то символом $\mathfrak{g}_{(\mathbf{C})}$ (или просто $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$) обозначается комплексная алгебра Ли $\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{R}}\mathfrak{g}$, полученная расширением поля скаляров. Имеет место биективное соответствие между гомоморфизмами вещественных алгебр Ли $\mathfrak{g}\to\mathfrak{a}_{[\mathbf{R}]}$ и гомоморфизмами комплексных алгебр Ли $\mathfrak{g}_{(\mathbf{C})}\to\mathfrak{a}$, а именно если $f\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{a}_{[\mathbf{R}]}$ и $g\colon \mathfrak{g}_{(\mathbf{C})}\to\mathfrak{a}$ — отвечающие друг другу гомоморфизмы, то $f(x)=g(1\otimes x)$ и $g(\lambda\otimes x)=\lambda f(x)$ для всех $x\in\mathfrak{g}$, $\lambda\in\mathbf{C}$.

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{a}$ — комплексная алгебра Ли. Вещественной формой алгебры Ли $\mathfrak{a}$ называется всякая вещественная подалгебра $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{a}$, являющаяся* $\mathbf{R}$*-структурой на векторном* $\mathbf{C}$*-пространстве $\mathfrak{a}$* (*Alg.*, chap. II, p. 119, déf. 1).

Это означает, что гомоморфизм комплексных алгебр Ли $\mathfrak{g}_{(\mathbf{C})}\to\mathfrak{a}$, ассоциированный с канонической инъекцией, биективен. Вещественная подалгебра $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{a}$, следовательно, является вещественной формой алгебры Ли $\mathfrak{a}$ тогда и только тогда, когда подпространства $\mathfrak{g}$ и $i\mathfrak{g}$ вещественного векторного пространства $\mathfrak{a}$ являются взаимно дополнительными. *Сопряжением* в $\mathfrak{a}$ относительно вещественной формы $\mathfrak{g}$ называется отображение $\sigma\colon\ \mathfrak{a}\to\mathfrak{a}$, такое, что

$$\sigma(x+iy)=x-iy,\quad x,\quad y\in\mathfrak{g}. \tag{1}$$

Предложение 1. а) *Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная форма алгебры Ли $\mathfrak{a}$ и σ — сопряжение в $\mathfrak{a}$ относительно $\mathfrak{g}$. Тогда*

$$\sigma^2=\mathrm{Id}_{\mathfrak{a}},\ \sigma(\lambda x+\mu y)=\bar{\lambda}\sigma(x)+\bar{\mu}\sigma(y),\ [\sigma(x),\sigma(y)]=\sigma[x,y] \tag{2}$$

для $\lambda,\mu\in\mathbf{C}$, $x, y\in\mathfrak{a}$. Для того чтобы элемент x из $\mathfrak{a}$ принадлежал $\mathfrak{g}$, необходимо и достаточно, чтобы $\sigma(x)=x$.

б) *Пусть $\sigma\colon\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}$ — отображение, удовлетворяющее условиям* (2). *Тогда множество $\mathfrak{g}$ неподвижных точек отображения σ является вещественной формой алгебры $\mathfrak{a}$, а σ — сопряжением в $\mathfrak{a}$ относительно $\mathfrak{g}$.*

Доказательство очевидно.

Отметим, что если через B обозначить форму Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{a}$ и если $\mathfrak{g}$ — вещественная форма этой алгебры Ли, то ограничение B на $\mathfrak{g}$ является формой Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В частности, B принимает вещественные значения на $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. Предположим, что $\mathfrak{a}$ *редуктивна*. Для того чтобы вещественная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ была компактной, необходимо и достаточно, чтобы форма, полученная ограничением B на $\mathfrak{g}$, была отрицательной (§ 1, n° 3). В этом случае говорят, что $\mathfrak{g}$ является *компактной вещественной формой* алгебры Ли $\mathfrak{a}$.

2. Вещественные формы, ассоциированные с системой Шевалле

В этом пункте рассматривается расщепленная полупростая алгебра Ли $(\mathfrak{a}, \mathfrak{h})$ над полем $\mathbf{C}$ (гл. VIII, § 2, n° 1) с системой корней $R(\mathfrak{a}, \mathfrak{h}) = R$ и система Шевалле $(X_\alpha)_{\alpha \in R}$ этой алгебры Ли (гл. VIII, § 2, n° 4, определение 3).

Напомним (см. *там же*), что линейное отображение $\theta\colon \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$, которое совпадает с $-\mathrm{Id}_{\mathfrak{h}}$ на $\mathfrak{h}$ и переводит X_α в $X_{-\alpha}$ для всех $\alpha \in R$, является автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{a}$. С другой стороны (*там же,* предложение 7), если α, β, $\alpha+\beta$ — корни, то

$$[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}, \tag{3}$$

где $N_{\alpha,\beta} \in \mathbf{R}^*$ и

$$N_{-\alpha,-\beta} = N_{\alpha,\beta}. \tag{4}$$

Обозначим через $\mathfrak{h}_0$ вещественное векторное подпространство в $\mathfrak{h}$, состоящее из таких $H \in \mathfrak{h}$, что $\alpha(H) \in \mathbf{R}$ для всех $\alpha \in R$. Тогда $\mathfrak{h}_0$ является $\mathbf{R}$-структурой на комплексном векторном пространстве $\mathfrak{h}$, для всех $\alpha \in R$ имеем $[X_\alpha, X_{-\alpha}] \in \mathfrak{h}_0$ и ограничение формы Киллинга B алгебры $\mathfrak{a}$ на $\mathfrak{h}_0$ невырожденно и положительно (гл. VIII, § 2, n° 2, замечание 2). Кроме того,

$$B(H, X_\alpha) = 0,\quad B(X_\alpha, X_\beta) = 0,\ \text{если}\ \alpha+\beta \neq 0,\quad B(X_\alpha, X_{-\alpha}) < 0 \tag{5}$$

(гл. VIII, § 2, n° 2, предложение 1 и n° 4, лемма 3).

Предложение 2. а) *Вещественное векторное подпространство* $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{h}_0 + \sum_{\alpha \in R} \mathbf{R}X_\alpha$ *в* $\mathfrak{a}$ *является вещественной формой алгебры* $\mathfrak{a}$ *с подалгеброй Картана* $\mathfrak{h}_0$. *Пара* $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{h}_0)$ *является расщепленной полупростой вещественной алгеброй Ли с системой Шевалле* (X_α).

б) *Пусть* σ *— сопряжение в* $\mathfrak{a}$ *относительно* $\mathfrak{a}_0$. Тогда $\sigma\circ\theta = \theta\circ\sigma$. *Множество* $\mathfrak{a}_u$ *неподвижных точек отображения* $\sigma\circ\theta$ *является компактной вещественной формой алгебры Ли* $\mathfrak{a}$, *и* $i\mathfrak{h}_0$ *— подалгебра Картана алгебры Ли* $\mathfrak{a}_u$.

Часть а) сразу следует из предыдущего. Докажем б). Поскольку $\sigma\circ\theta$ и $\theta\circ\sigma$ — два полулинейных отображения из $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{a}$, совпадающих на $\mathfrak{a}_0$, то они совпадают всюду. Тогда отображение $\sigma\circ\theta$ удовлетворяет условиям (2) из n° 1 и, следовательно, является сопряжением в $\mathfrak{a}$ относительно вещественной формы $\mathfrak{a}_u$, состоящей из таких $x \in \mathfrak{a}$, что $\sigma\circ\theta(x) = x$ (предложение 1). Положим для $\alpha \in R$

$$u_\alpha = X_\alpha + X_{-\alpha},\quad v_\alpha = i(X_\alpha - X_{-\alpha}). \tag{6}$$

Тогда векторное $\mathbf{R}$-пространство $\mathfrak{a}_u$ порождается $i\mathfrak{h}_0$, u_α, v_α. Более точно, если выбрать камеру C системы корней R, то

$$\mathfrak{a}_u = i\mathfrak{h}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in R_+(C)} (\mathbf{R}u_\alpha + \mathbf{R}v_\alpha). \tag{7}$$

Очевидно, что $i\mathfrak{h}_0$ является подалгеброй Картана алгебры Ли $\mathfrak{a}_u$, и остается доказать, что ограничение на $\mathfrak{a}_u$ формы B отрицательно. Поскольку $i\mathfrak{h}_0$ и различные подпространства $\mathbf{R}u_\alpha \oplus \mathbf{R}v_\alpha$ ортогональны относительно B, см. (5), ограничение B на $i\mathfrak{h}_0$ отрицательно, и мы получаем

$$B(u_\alpha, u_\alpha) = B(v_\alpha, v_\alpha) = 2B(X_\alpha, X_{-\alpha}) < 0, \ B(u_\alpha, v_\alpha) = 0, \tag{8}$$

откуда следует доказываемое утверждение.

Замечание. В предыдущих обозначениях имеют место формулы

$$[h, u_\alpha] = -i\alpha(h)\, v_\alpha, \quad [h, v_\alpha] = i\alpha(h)\, u_\alpha, \quad [u_\alpha, v_\alpha] = 2i\, H_\alpha \quad (h \in \mathfrak{h}), \tag{9}$$

$$[u_\alpha, u_\beta] = N_{\alpha,\beta}\, u_{\alpha+\beta} + N_{\alpha,-\beta}\, u_{\alpha-\beta}, \qquad \alpha \neq \pm\beta, \tag{10}$$

$$[v_\alpha, v_\beta] = -N_{\alpha,\beta}\, u_{\alpha+\beta} + N_{\alpha,-\beta}\, u_{\alpha-\beta}, \quad \alpha \neq \pm\beta, \tag{11}$$

$$[u_\alpha, v_\beta] = N_{\alpha,\beta}\, v_{\alpha+\beta} - N_{\alpha,-\beta}\, v_{\alpha-\beta}, \qquad \alpha \neq \pm\beta \tag{12}$$

(в трех последних формулах, как обычно, считается, что $N_{\gamma,\delta} = 0$, если $\gamma + \delta$ не корень).

Отметим, что $\sum \mathbf{R}u_\alpha$ — вещественная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{a}$, которая является не чем иным, как $\mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{a}_u$.

Пусть $G(R)$ — группа радикальных весов системы R (гл. VI, § 1, n° 9). Напомним, что с любым гомоморфизмом $\gamma\colon Q(R) \to \mathbf{C}^*$ ассоциируется элементарный автоморфизм $f(\gamma)$ алгебры Ли $\mathfrak{a}$, такой, что $f(\gamma)(h) = h$ для $h \in \mathfrak{h}$ и $f(\gamma)X_\alpha = \gamma(\alpha)X_\alpha$ (гл. VIII, § 5, n° 2).

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{g}$ — компактная вещественная форма алгебры Ли $\mathfrak{a}$, такая, что $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = i\mathfrak{h}_0$. Существует такой гомоморфизм $\gamma\colon Q(R) \to \mathbf{R}^*_+$, что $\mathfrak{g} = f(\gamma)(\mathfrak{a}_u)$.*

Пусть τ — сопряжение в $\mathfrak{a}$ относительно $\mathfrak{g}$. Тогда, согласно предположению, $\tau(x) = x$ для $x \in i\mathfrak{h}_0$, и, следовательно, $\tau(x) = -x$ для $x \in \mathfrak{h}_0$. Для всех $\alpha \in R$ и всех $h \in \mathfrak{h}_0$

$$[h, \tau(X_\alpha)] = [-\tau(h), \tau(X_\alpha)] = -\tau([h, X_\alpha]) = -\tau(\alpha(h)X_\alpha).$$

Из этого вытекает, что $[h, \tau(X_\alpha)] = -\alpha(h)\tau(X_\alpha)$ для всех $h \in \mathfrak{h}_0$, а следовательно, и для всех $h \in \mathfrak{h}$. Таким образом, существует элемент $c_\alpha \in \mathbf{C}^*$, такой, что $\tau(X_\alpha) = c_\alpha X_{-\alpha}$. Поскольку $[X_\alpha, X_{-\alpha}] \in \mathfrak{h}_0$, то $[\tau(X_\alpha), \tau(X_{-\alpha})] = -[X_\alpha, X_{-\alpha}]$ и, значит, $c_\alpha . c_{-\alpha} = 1$; аналогично из формул (3) и (4) получаем, что $c_{\alpha+\beta} = c_\alpha c_\beta$, если α, β, $\alpha+\beta$ являются корнями. Согласно следствию 2 предложения 19 из гл. VI, § 1, n° 6, существует гомоморфизм $\delta\colon Q(R) \to \mathbf{C}^*$, такой, что $\delta(\alpha) = c_\alpha$ для всех $\alpha \in R$.

Теперь покажем, что все числа c_α вещественны и строго положительны. Действительно, $c_\alpha B(X_\alpha, X_{-\alpha}) = B(X_\alpha, \tau(X_\alpha))$, и, поскольку значение $B(X_\alpha, X_{-\alpha})$ отрицательно, то достаточно показать, что $B(z, \tau(z)) < 0$ для

любого ненулевого элемента z из $\mathfrak{a}$. Поскольку любой элемент из $\mathfrak{a}$ записывается в виде $x+iy$, где x и y из $\mathfrak{g}$, то

$$B(x+iy, \tau(x+iy)) = B(x+iy, x-iy) = B(x, x) + B(y, y),$$

откуда вытекает требуемое утверждение, так как ограничение B на $\mathfrak{g}$, согласно предположению, невырожденно и отрицательно.

Из этого следует, что гомоморфизм δ принимает значения в $\mathbf{R}_+^*$; поэтому существует гомоморфизм $\gamma\colon Q(R) \to \mathbf{R}_+^*$, такой, что $\delta = \gamma^{-2}$. Тогда $f(\gamma)^{-1}(\mathfrak{g})$ является вещественной формой алгебры Ли $\mathfrak{a}$; соответствующим сопряжением будет $\tau' = f(\gamma)^{-1} \circ \tau \circ f(\gamma)$. Для всех $\alpha \in R$ получаем

$$\tau'(X_\alpha) = f(\gamma)^{-1}(\tau(c_\alpha^{-1/2} X_\alpha)) = f(\gamma)^{-1}(c_\alpha^{1/2} X_{-\alpha}) = X_{-\alpha}$$

и $\tau'(h) = \tau(h) = h$ для $h \in i\mathfrak{h}_0$. Из этого следует, что τ' является сопряжением относительно компактной вещественной формы $\mathfrak{a}_u$. Значит, $f(\gamma)^{-1}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{a}_u$.

3. *Сопряженность компактных форм*

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{a}$ — комплексная полупростая алгебра Ли.*

а) *$\mathfrak{a}$ обладает компактными* (соотв. *расщепляемыми*) *вещественными формами.*

б) *Группа* $\operatorname{Int}(\mathfrak{a})$ *действует транзитивно на множестве компактных* (соотв. *расщепляемых*) *вещественных форм алгебры Ли $\mathfrak{a}$.*

Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{a}$. Тогда $(\mathfrak{a}, \mathfrak{h})$ — расщепленная полупростая алгебра Ли (гл. VIII, § 2, n° 1, замечание 2), обладающая системой Шевалле (X_α) (гл. VIII, § 4, n° 4, следствие предложения 5). Часть а), таким образом, следует из предложения 2. Пусть $\mathfrak{g}$ — компактная вещественная форма алгебры Ли $\mathfrak{a}$. Покажем, что существует $v \in \operatorname{Int}(\mathfrak{a})$, такой, что $v(\mathfrak{a}_u) = \mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{t}$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$; тогда $\mathfrak{t}_{(\mathbf{C})}$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{a}$. Поскольку группа $\operatorname{Int}(\mathfrak{a})$ действует транзитивно на множестве подалгебр Картана алгебры Ли $\mathfrak{a}$ (гл. VII, § 3, n° 2, теорема 1), то доказательство сводится к случаю $\mathfrak{t}_{(\mathbf{C})} = \mathfrak{h}$. Так как форма $\mathfrak{g}$ компактна, собственные значения эндоморфизма $\operatorname{ad} h$ для $h \in \mathfrak{t}$ чисто мнимы (§ 1, n° 3, предложение 1). Следовательно, корни $\alpha \in R$ отображают $\mathfrak{t}$ в $i\mathbf{R}$, а значит, $\mathfrak{t} = i\mathfrak{h}_0$. Тогда, согласно предложению 3 (n° 2), существует такой $v \in \operatorname{Int}(\mathfrak{a})$, что $v(\mathfrak{a}_u) = \mathfrak{g}$, откуда следует утверждение б) в случае компактных форм. Пусть, наконец, $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ — две расщепляемые вещественные формы алгебры Ли $\mathfrak{a}$. Существуют разметки $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{h}_1, B_1, (X_\alpha^1))$ и $(\mathfrak{m}_2, \mathfrak{h}_2, B_2, (X_\alpha^2))$ (гл. VIII, § 4, n° 1), которые очевидным образом продолжаются до разметок e_1 и e_2 алгебры Ли $\mathfrak{a}$. Автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{a}$, который переводит e_1 в e_2, переводит $\mathfrak{m}_1$ в $\mathfrak{m}_2$; таким образом, достаточно применить предложение 5 из гл. VIII, § 5, n° 3, чтобы доказать существование элемента u из $\operatorname{Aut}_0(\mathfrak{a}) = \operatorname{Int}(\mathfrak{a})$, такого, что $u(\mathfrak{m}_1) = \mathfrak{m}_2$.

Замечание. Позже мы получим общую классификацию вещественных форм комплексной полупростой алгебры Ли.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ — две компактные вещественные алгебры Ли. Для того чтобы $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы комплексные алгебры Ли $\mathfrak{g}_{(\mathbf{C})}$ и $\mathfrak{g}'_{(\mathbf{C})}$ были изоморфны.*

Необходимость условия очевидна. Обратно, предположим, что $\mathfrak{g}_{(\mathbf{C})}$ и $\mathfrak{g}'_{(\mathbf{C})}$ изоморфны. Пусть $\mathfrak{c}$ (соотв. $\mathfrak{c}'$) — центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (соотв. $\mathfrak{g}'$) и $\mathfrak{s}$ (соотв. $\mathfrak{s}'$) — производная алгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (соотв. $\mathfrak{g}'$). Тогда $\mathfrak{c}_{(\mathbf{C})}$ и $\mathfrak{c}'_{(\mathbf{C})}$ являются соответственно центрами алгебр Ли $\mathfrak{g}_{(\mathbf{C})}$ и $\mathfrak{g}'_{(\mathbf{C})}$ и, следовательно, изоморфны; из этого вытекает, что коммутативные алгебры Ли $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{c}'$ изоморфны. Аналогично $\mathfrak{s}_{(\mathbf{C})}$ и $\mathfrak{s}'_{(\mathbf{C})}$ изоморфны, а значит, согласно теореме 1б), изоморфны и алгебры $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{s}'$, являющиеся компактными вещественными формами двух изоморфных комплексных полупростых алгебр Ли.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{a}$ — комплексная алгебра Ли. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *$\mathfrak{a}$ редуктивна.*

(ii) *Существует компактная вещественная алгебра Ли $\mathfrak{g}$, такая, что $\mathfrak{a}$ изоморфна $\mathfrak{g}_C$.*

(iii) *Существует компактная группа Ли G, такая, что $\mathfrak{a}$ изоморфна $L(G)_{(\mathbf{C})}$.*

Согласно определению 1 из § 1, n° 3, условия (ii) и (iii) эквивалентны и из них следует условие (i). Если $\mathfrak{a}$ редуктивна, то она является прямым произведением коммутативной алгебры, которая очевидным образом обладает компактной вещественной формой, и полупростой алгебры, которая также обладает компактной вещественной формой согласно теореме 1а). Следовательно, (i) влечет за собой (ii).

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{a}_2$ — две комплексные полупростые алгебры Ли. Компактными вещественными формами алгебры Ли $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$ являются произведения $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$, где $\mathfrak{g}_i$ — компактная вещественная форма алгебры Ли $\mathfrak{a}_i$ для $i = 1, 2$.*

Действительно, существует компактная вещественная форма $\mathfrak{g}_1$ (соотв. $\mathfrak{g}_2$) алгебры Ли $\mathfrak{a}_1$ (соотв. $\mathfrak{a}_2$); тогда $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ — компактная вещественная форма алгебры Ли $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$. Следствие вытекает из теоремы 1б), примененной к $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ и $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$.

В частности, из этого следствия 3 получается, что компактная вещественная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста тогда и только тогда, когда комплексная алгебра Ли $\mathfrak{g}_{(\mathbf{C})}$ проста. Тогда говорят, что $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли *типа A_n* или B_n, ..., если $\mathfrak{g}_{(\mathbf{C})}$ — алгебра Ли типа A_n или B_n, ... Согласно следствию 1 этого пункта, *две компактные простые вещественные алгебры Ли изоморфны тогда и только тогда, когда они одного типа.*

Пусть G — почти простая (гл. III, § 9, n° 8, определение 3) связная комплексная группа Ли. Говорят, что G — группа Ли *типа* A_n или B_n, ..., если ее алгебра Ли имеет тип A_n или B_n, ... Две односвязные почти простые компактные группы Ли изоморфны тогда и только тогда, когда они одного типа.

4. *Пример I: компактные алгебры Ли типа* A_n

Пусть V — конечномерное комплексное векторное пространство и Φ — невырожденная положительная эрмитова форма на V. *Унитарная группа*, ассоциированная с формой Φ (см. *Alg.*, chap. IX [1])),— это подгруппа $\mathbf{U}(\Phi)$ группы $\mathbf{GL}(V)$, состоящей из автоморфизмов комплексного гильбертова пространства (V, Φ). Это (вещественная) подгруппа Ли группы $\mathbf{GL}(V)$, алгебра Ли которой является подалгеброй $\mathfrak{u}(\Phi)$ вещественной алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$, состоящей из эндоморфизмов x пространства V, таких, что $x^* = -x$ (гл. III, § 3, n° 10, следствие 2 предложения 37), где через x^* обозначается эндоморфизм, сопряженный к x относительно Φ. Поскольку группа $\mathbf{U}(\Phi)$ компактна (§ 1, n° 1), $\mathfrak{u}(\Phi)$ — *компактная* вещественная алгебра Ли. Аналогично *специальная унитарная* группа $\mathbf{SU}(\Phi) = \mathbf{U}(\Phi) \cap \mathbf{SL}(V)$ — это компактная подгруппа Ли в $\mathbf{SL}(V)$ с алгеброй Ли $\mathfrak{su}(\Phi) = \mathfrak{u}(\Phi) \cap \mathfrak{sl}(V)$.

Если $V = \mathbf{C}^n$ и Φ — стандартная эрмитова форма (для которой канонический базис в $\mathbf{C}^n$ ортонормирован), то вместо $\mathbf{U}(\Phi)$, $\mathbf{SU}(\Phi)$, $\mathfrak{u}(\Phi)$, $\mathfrak{su}(\Phi)$ пишут $\mathbf{U}(n, \mathbf{C})$, $\mathbf{SU}(n, \mathbf{C})$, $\mathfrak{u}(n, \mathbf{C})$, $\mathfrak{su}(n, \mathbf{C})$. Элементами из $\mathbf{U}(n, \mathbf{C})$ (соотв. $\mathfrak{u}(n, \mathbf{C})$) являются такие матрицы $A \in M_n(\mathbf{C})$, что $A.{}^t\bar{A} = I_n$ (соотв. $A = -{}^t\bar{A}$). Их называют *унитарными* (соотв. *антиэрмитовыми*).

Предложение 4. а) *Компактными вещественными формами комплексной алгебры Ли* $\mathfrak{sl}(V)$ *являются алгебры* $\mathfrak{su}(\Phi)$, где Φ *пробегает множество невырожденных положительных эрмитовых форм на комплексном векторном пространстве* V.

б) *Алгебры* $\mathfrak{u}(\Phi)$ *являются компактными вещественными формами алгебры Ли* $\mathfrak{gl}(V)$.

Пусть Φ — невырожденная положительная эрмитова форма на V. Для всех $x \in \mathfrak{gl}(V)$ положим $\sigma(x) = -x^*$ (где x^* — эндоморфизм, сопряженный к x относительно Φ). Тогда σ удовлетворяет условиям (2) предложения 1 из n° 1 и, следовательно, множество $\mathfrak{u}(\Phi)$ (соотв. $\mathfrak{su}(\Phi)$) неподвижных точек отображения σ в $\mathfrak{gl}(V)$ (соотв. $\mathfrak{sl}(V)$) является компактной вещественной формой алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ (соотв. $\mathfrak{sl}(V)$). Поскольку группа $\mathbf{GL}(V)$ действует транзитивно на множестве невырожденных положительных эрмитовых форм на V (*Alg.*, chap. IX) и на множестве компактных вещественных форм алгебры Ли $\mathfrak{sl}(V)$ (n° 3, теорема 1, и гл. VIII, § 13, n° 1 (VII)), то предложение 4 доказано.

---

[1]) См. также *Алг.*, 1966, гл. IX, § 6, n° 2.— *Прим. перев.*

Следствие. *Любая простая компактная вещественная алгебра Ли типа* A_n $(n\geqslant 1)$ *изоморфна алгебре Ли* $\mathfrak{su}(n+1, \mathbf{C})$.

Действительно, любая комплексная алгебра Ли типа A_n изоморфна $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbf{C})$ (гл. VIII, § 13, n° 1).

Замечания. 1) Имеем $\mathfrak{gl}(V)=\mathfrak{sl}(V)\times\mathbf{C}.1_V$, $\mathfrak{u}(\Phi)=\mathfrak{su}(\Phi)\times\mathbf{R}.i1_V$; компактными вещественными формами алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ являются алгебры $\mathfrak{su}(\Phi)\times\mathbf{R}.\alpha 1_V$, $\alpha\in\mathbf{C}^*$.

2) Если комплексную алгебру Ли $\mathfrak{a}=\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ наделить расщеплением и системой Шевалле, введенной в гл. VIII, § 13, n° 1 (IX), то в обозначениях n° 2

$$\mathfrak{a}_u=\mathfrak{su}(n, \mathbf{C}),\ \mathfrak{a}_0=\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C}),\ \mathfrak{a}_u\cap\mathfrak{a}_0=\mathfrak{o}(n, \mathbf{R}).$$

5. Пример II: компактные алгебры Ли типа B_n и D_n

Пусть V — конечномерное вещественное векторное пространство и Q — невырожденная положительная квадратичная форма на V. *Ортогональной группой*, ассоциированной с Q (*Alg*., chap. IX), называется подгруппа $\mathbf{O}(Q)$ в $\mathbf{GL}(V)$, состоящая из автоморфизмов вещественного гильбертова пространства (V, Q). Это подгруппа Ли в $\mathbf{GL}(V)$, алгебра Ли которой является подалгеброй $\mathfrak{o}(Q)$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$, состоящей из эндоморфизмов x пространства V, таких, что $x^*=-x$ (гл. III, § 3, n° 10, следствие 2 предложения 37), где x^* обозначает эндоморфизм, сопряженный к x относительно Q. Поскольку группа $\mathbf{O}(Q)$ компактна, то $\mathfrak{o}(Q)$ — *компактная* вещественная алгебра Ли. Положим $\mathbf{SO}(Q)=\mathbf{O}(Q)\cap\mathbf{SL}(V)$; это замкнутая подгруппа конечного индекса в $\mathbf{O}(Q)$ (индекса 2, если $\dim V\neq 0$), и, следовательно, ее алгеброй Ли тоже является $\mathfrak{o}(Q)$.

Если $V=\mathbf{R}^n$ и Q — стандартная квадратичная форма, для которой канонический базис в $\mathbf{R}^n$ ортонормирован, то вместо $\mathbf{O}(Q)$, $\mathbf{SO}(Q)$, $\mathfrak{o}(Q)$ пишут $\mathbf{O}(n, \mathbf{R})$, $\mathbf{SO}(n, \mathbf{R})$, $\mathfrak{o}(n, \mathbf{R})$. Элементами из $\mathbf{O}(n, \mathbf{R})$ (соотв. $\mathfrak{o}(n, \mathbf{R})$) являются матрицы $A\in\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$, такие, что $A.{}^tA=I_n$ (соотв. $A=-{}^tA$), которые называются *ортогональными* (соотв. *антисимметричными*).

Пусть $V_{(\mathbf{C})}$ — векторное $\mathbf{C}$-пространство, полученное из V, и $Q_{(\mathbf{C})}$ — квадратичная форма на $V_{(\mathbf{C})}$, полученная из Q. Отождествим $\mathfrak{gl}(V)_{(\mathbf{C})}$ с $\mathfrak{gl}(V_{(\mathbf{C})})$; тогда алгебра Ли $\mathfrak{o}(Q)_{(\mathbf{C})}$ отождествляется с алгеброй Ли $\mathfrak{o}(Q_{(\mathbf{C})})$ — это очевидно, поскольку отображение $x\mapsto x^*+x$ из $\mathfrak{gl}(V_{(\mathbf{C})})$ в себя $\mathbf{C}$-линейно. Поскольку $\mathfrak{o}(Q_{(\mathbf{C})})$ — алгебра Ли типа B_n, если $\dim V=2n+1$, $n\geqslant 1$, и типа D_n, если $\dim V=2n$, $n\geqslant 3$ (гл. VIII, § 13, nn° 2 и 4), то получаем

Предложение 5. *Любая компактная простая вещественная алгебра Ли типа* B_n, $n\geqslant 1$ (соотв. *типа* D_n, $n\geqslant 3$) *изоморфна алгебре Ли* $\mathfrak{o}(2n+1, \mathbf{R})$ (соотв. $\mathfrak{o}(2n, \mathbf{R})$).

6. Компактные группы ранга 1

Согласно *Top. gen.*, chap. VIII, p. 5, prop. 3, p. 6, prop. 4, p 7, rem. 4, топологическая группа $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$ изоморфна топологической группе $\mathbf{S}_3$ кватернионов с нормой 1, и факторгруппа группы $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$ по подгруппе Z, состоящей из матриц I_2 и $-I_2$, изоморфна топологической группе $\mathbf{SO}(3, \mathbf{R})$. Отметим, что Z — центр группы $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$. Действительно, поскольку $\mathbf{H} = \mathbf{R}.\mathbf{S}_3$, любой элемент, лежащий в центре группы $\mathbf{S}_3$, лежит в центре $\mathbf{R}$ алгебры кватернионов $\mathbf{H}$ и, следовательно, принадлежит группе из двух элементов $\mathbf{S}_3 \cap \mathbf{R} = \{-1, 1\}$.

Предложение 6. *Любая полупростая компактная вещественная алгебра Ли ранга* 1 *изоморфна* $\mathfrak{su}(2, \mathbf{C})$ *и* $\mathfrak{o}(3, \mathbf{R})$. *Любая связная полупростая компактная группа Ли ранга* 1 *изоморфна группе Ли* $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$, *если она односвязна, и группе Ли* $\mathbf{SO}(3, \mathbf{R})$ *в противном случае.*

Первое утверждение вытекает из следствия предложения 4 и из предложения 5. Поскольку группа Ли $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$ гомеоморфна группе $\mathbf{S}_3$ (*Top. gen.*, chap. VIII, p. 7, rem. 4), а значит, односвязна (*Top. gen.*, chap. XI), любая односвязная полупростая компактная группа Ли ранга 1 изоморфна $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$; любая связная неодносвязная полупростая компактная группа Ли ранга 1 изоморфна факторгруппе $\mathbf{SU}(2,\mathbf{C})$ по подгруппе группы Z, состоящей не только из единичного элемента, т. е. группе $\mathbf{SO}(3, \mathbf{R})$.

Замечание. Из сказанного выше следует, что $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$ односвязна и что группа $\pi_1(\mathbf{SO}(3, \mathbf{R}))$ имеет порядок 2. Далее мы покажем, что эти результаты соответственно обобщаются на группы $\mathbf{SU}(n, \mathbf{C})$ $(n \geqslant 1)$ и $\mathbf{SO}(n, \mathbf{R})$ $(n \geqslant 3)$ (см. также § 3, упражнение 4 и 5).

Напомним (гл. VIII, § 1, n° 1), что каноническим базисом в $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ называется базис (X_+, X_-, H), где

$$X_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, полагая

$$U = X_+ + X_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = i(X_+ - X_-) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad iH = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

получаем базис (U, V, iH) в $\mathfrak{su}(2, \mathbf{C})$, также называемый каноническим. Имеем

$$[iH, U] = 2V, \quad [iH, V] = -2U, \quad [U, V] = 2iH. \tag{13}$$

Если через B обозначить форму Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{su}(2, \mathbf{C})$, то несложные вычисления дают

$$B(aU + bV + ciH, a'U + b'V + c'iH) = -8(aa' + bb' + cc'). \tag{14}$$

Таким образом, если мы отождествим $\mathfrak{su}(2, \mathbf{C})$ с $\mathbf{R}^3$ при помощи канонического базиса, то присоединенное представление группы $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$ определит гомоморфизм

$$\mathbf{SU}(2, \mathbf{C}) \to \mathbf{SO}(3, \mathbf{R})$$

(см. ниже).

Кроме того, отметим, что $\mathbf{R}i\mathrm{H}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{su}(2, \mathbf{C})$ и что соответствующий ей максимальный тор T в группе $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$ состоит из диагональных матриц $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}$, где $a\bar{a} = 1$, а экспоненциальное отображение

$$\exp: \mathbf{R}i\mathrm{H} \to T$$

переводит $x\mathrm{H}$ для $x \in \mathbf{R}i$ в матрицу $\begin{pmatrix} \exp(x) & 0 \\ 0 & \exp(-x) \end{pmatrix}$ и, следовательно, имеет ядро $\mathbf{Z}.\mathrm{K}$, где K — элемент из $\mathfrak{su}(2, \mathbf{C})$, определяемый равенством

$$\mathrm{K} = 2\pi i\mathrm{H} = \begin{pmatrix} 2\pi i & 0 \\ 0 & -2\pi i \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Кроме того, центр группы $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$ состоит из единицы и $\exp(\mathrm{K}/2)$.

Положим

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{SU}(2, \mathbf{C}). \tag{16}$$

Согласно n° 5, § 1, гл. VIII,

$$\theta^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\mathrm{Int}\,\theta)\, t = t^{-1}, \quad t \in T, \tag{17}$$

$$(\mathrm{Ad}\,\theta)\, \mathrm{X}_+ = \mathrm{X}_-, \quad (\mathrm{Ad}\,\theta)\, \mathrm{X}_- = \mathrm{X}_+, \quad (\mathrm{Ad}\,\theta)\, \mathrm{U} = \mathrm{U}, \quad (\mathrm{Ad}\,\theta)\, \mathrm{V} = -\mathrm{V}. \tag{18}$$

Наконец, для $t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} \in T$ имеем

$$(\mathrm{Ad}\,t)\, \mathrm{X}_+ = a^2\, \mathrm{X}_+, \quad (\mathrm{Ad}\,t)\, \mathrm{X}_- = a^{-2}\, \mathrm{X}_-, \quad (\mathrm{Ad}\,t)\, \mathrm{H} = \mathrm{H}, \tag{19}$$

$$(\mathrm{Ad}\,t)\, \mathrm{U} = \mathrm{Re}\,(a^2)\, \mathrm{U} + \mathrm{Im}\,(a^2)\, \mathrm{V}, \quad (\mathrm{Ad}\,t)\, \mathrm{V} = -\mathrm{Im}\,(a^2)\, \mathrm{U} + \mathrm{Re}\,(a^2)\, \mathrm{V}. \tag{20}$$

§ 4. Система корней, ассоциированная с компактной группой

В параграфах с 4 по 8 через G обозначается связная компактная группа Ли, а через T — максимальный тор в G. Через $\mathfrak{g}$ (соотв. $\mathfrak{t}$) *обозначается алгебра Ли группы Ли G* (соотв. T), *через* $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ (соотв. $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$) *— алгебра Ли, полученная из* $\mathfrak{g}$ (соотв. $\mathfrak{t}$) *комплексификацией. Через W обозначается группа Вейля группы Ли G относительно T* (§ 2, n° 5).

1. *Группа* $X(H)$

Пусть H — компактная группа Ли. Через $X(H)$ обозначим (коммутативную) группу непрерывных гомоморфизмов из H в топологическую группу $\mathbf{C}^*$. Согласно теореме 1 из гл. III, § 8, n° 1, элементами группы $X(H)$ являются морфизмы групп Ли. Для любого $a \in X(H)$ дифференциал a есть $\mathbf{R}$-линейное отображение $L(a)$: $L(H) \to L(\mathbf{C}^*)$. Впредь мы будем отождествлять алгебру Ли группы $\mathbf{C}^*$ с $\mathbf{C}$ таким образом, чтобы экспоненциальное отображение для $\mathbf{C}^*$ совпадало с отображением $z \mapsto e^z$ из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}^*$. С любым элементом a из $X(H)$ ассоциируется элемент $L(a) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(L(H), \mathbf{C})$; обозначим символом $\delta(a)$ элемент из $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(L(H)_{(\mathbf{C})}, \mathbf{C})$, который ему соответствует (т. е. такой, что его ограничение на $L(H) \subset L(H)_{(\mathbf{C})}$ совпадает с $L(a)$).

Для любого $x \in L(H)$ и любого $a \in X(H)$

$$a(\exp_H x) = e^{\delta(a)(x)}$$

ввиду функториальности экспоненциального отображения (гл. III, § 6, n° 4, предложение 10).

Обычно мы будем считать, что группа $X(H)$ аддитивна. В этом случае элемент $a(g)$ из $\mathbf{C}^*$ обозначается через g^a. Тогда справедливы формулы

$$g^{a+b} = g^a g^b, \quad g \in H, \quad a, b \in X(H)$$

и

$$(\exp_H x)^a = e^{\delta(a)(x)}, \quad x \in L(H), \quad a \in X(H).$$

Поскольку группа H компактна, элементы из $X(H)$ принимают значения в подгруппе $\mathbf{U} = \mathbf{U}(1, \mathbf{C})$ комплексных чисел, по модулю равных 1. Таким образом, $X(H)$ отождествляется с группой непрерывных (или аналитических) гомоморфизмов из H в $\mathbf{U}$. Из этого вытекает, что для любого $a \in L(H)$ значения отображения $L(a)$ лежат в подпространстве $\mathbf{R}i$ пространства $\mathbf{C}$, а следовательно, $\delta(a)$ отображает $L(H)$ в $\mathbf{R}i$.

Если группа H коммутативна, то группа $X(H)$ является не чем иным, как (дискретной) двойственной группой к H (*Спектр. теор.*, гл. II, § 1, n° 1). Если H коммутативна и конечна, то группа $X(H)$ отождествляется с конечной двойственной к H группой $D(H) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(H, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ (где в соответствии с *Alg.*, chap. VII, p. 27. ex. 1, группа $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ отождествляется с подгруппой в $\mathbf{C}^*$ при помощи гомоморфизма $r \mapsto \exp(2\pi i r)$).

Для любого морфизма $f: H \to H'$ компактных групп Ли через $X(f)$ обозначается гомоморфизм $a \mapsto a \circ f$ из $X(H')$ в $X(H)$. Если K — замкнутая нормальная подгруппа компактной группы Ли H, то имеет место точная последовательность $\mathbf{Z}$-модулей $0 \to X(H/K) \to X(H) \to X(K)$.

Предложение 1. *Для любой компактной группы Ли H группа $X(H)$ является $\mathbf{Z}$-модулем конечного типа, причем свободным, если H — связная группа Ли.*

Предположим сначала, что H связна. Любой элемент из $X(H)$ равен единице на производной группе $D(H)$ группы H, откуда следует изоморфизм $X(H/D(H)) \to X(H)$. Но группа $H/D(H)$ коммутативна и связна, а значит, является тором, и группа $X(H/D(H))$ является свободным $\mathbf{Z}$-модулем конечного типа (*Спектр. теор.*, гл. II, § 2, n° 1, следствие 2 предложения 1). В общем случае из точности последовательности

$$0 \to X(H/H_0) \to X(H) \to X(H_0),$$

где $X(H_0)$ — свободный $\mathbf{Z}$-модуль конечного типа, а модуль $X(H/H_0)$ конечен, вытекает, что $X(H)$ — модуль конечного типа.

Предложение 2. *Пусть H — коммутативная компактная группа Ли и $(a_i)_{i \in I}$ — семейство элементов из $X(H)$. Для того чтобы a_i порождали $X(H)$, необходимо и достаточно, чтобы пересечение $\operatorname{Ker} a_i$ состояло лишь из единичного элемента.*

Согласно теореме 4 из *Спектр. теор.*, гл. II, § 1, n° 7, ортогональное дополнение к $\operatorname{Ker} a_i$ есть подгруппа A_i в $X(H)$, порожденная a_i. Тогда (*там же*, следствие 2 теоремы 4) ортогональное дополнение к $\bigcap \operatorname{Ker} a_i$ есть подгруппа в $X(H)$, порожденная подгруппами A_i, откуда следует предложение.

2. Узловая группа тора

Ядро экспоненциального отображения $L(S) \to S$ называется *узловой группой* тора S и обозначается черз $\Gamma(S)$. Это дискретная подгруппа в $L(S)$ ранга, равного размерности S. Далее, $\mathbf{R}$-линейное отображение $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} \Gamma(S) \to L(S)$, которое является продолжением канонического вложения $\Gamma(S)$ в $L(S)$, биективно. Это отображение индуцирует при переходе к факторгруппам изоморфизм $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} \Gamma(S) \to S$.

Например, узловая группа $\Gamma(\mathbf{U})$ группы $\mathbf{U}$ есть подгруппа $2\pi i\mathbf{Z}$ в $L(\mathbf{U}) = i\mathbf{R}$. Для любого морфизма торов $f\colon S \to S'$ через $\Gamma(f)$ обозначим гомоморфизм $\Gamma(S) \to \Gamma(S')$, полученный из $L(f)$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \Gamma(S) & \to & L(S) & \xrightarrow{\exp_S} & S & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma(f)} & & \downarrow{\scriptstyle L(f)} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ 0 & \to & \Gamma(S') & \to & L(S') & \xrightarrow{\exp_{S'}} & S' & \to & 0 \end{array} \qquad (1)$$

Пусть $a \in X(S)$. Применяя только что сказанное к морфизму из S в $\mathbf{U}$, определяемому отображением a, видим, что $\mathbf{C}$-линейное отображение $\delta(a)\colon L(S)_{(\mathbf{C})} \to \mathbf{C}$ из n° 1 переводит $\Gamma(S)$ в $2\pi i\mathbf{Z}$. Определим $\mathbf{Z}$-*билинейную* форму на $X(S) \times \Gamma(S)$, полагая

$$\langle a, X \rangle = \frac{1}{2\pi i}\,\delta(a)(X),\quad a \in X(S),\quad X \in \Gamma(S). \qquad (2)$$

Предложение 3. *Билинейная форма* $(a, X) \mapsto \langle a, X \rangle$ *на* $\mathrm{X}(S) \times \Gamma(S)$ *невырожденна.*

Напомним (*Alg.*, chap. IX), что, согласно определению, это означает, что линейные отображения

$$\mathrm{X}(S) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Gamma(S), \mathbf{Z}) \text{ и } \Gamma(S) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathrm{X}(S), \mathbf{Z}),$$

ассоциированные с этой билинейной формой, биективны.

Нетрудно заметить, что если утверждение предложения верно для двух торов, то оно также верно для их произведения. Поскольку любой тор размерности n изоморфен $\mathbf{U}^n$, то доказательство сводится к случаю $S = \mathbf{U}$. Для этого частного случая доказательство очевидно.

Пусть $f: S \to S'$ — морфизм торов. Тогда линейные отображения $\mathrm{X}(f)$: $\mathrm{X}(S') \to \mathrm{X}(S)$ и $\Gamma(f)$: $\Gamma(S) \to \Gamma(S')$ сопряжены друг к другу: для любого $a' \in \mathrm{X}(S')$ и любого $X \in \Gamma(S)$

$$\langle \mathrm{X}(f)(a'), X \rangle = \langle a', \Gamma(f)(X) \rangle. \tag{3}$$

Предложение 4. *Пусть* S *и* S' — *два тора. Обозначим через* $M(S, S')$ *группу морфизмов из* S *в* S' (*как групп Ли*). *Отображения* $f \mapsto \mathrm{X}(f)$ *и* $f \mapsto \Gamma(f)$ *являются групповыми изоморфизмами из* $M(S, S')$ *на* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathrm{X}(S'), \mathrm{X}(S))$ *и* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Gamma(S), \Gamma(S'))$ *соответственно.*

Если f — морфизм групп Ли из S в S', то гомоморфизм $\mathrm{X}(f)$ является не чем иным, как гомоморфизмом, *двойственным* к f в смысле *Спектр. теор.*, гл. II, § 1, n° 7. Отображение $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ из $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathrm{X}(S'), \mathrm{X}(S))$ в $M(S, S')$, определенное *там же*, является обратным к отображению $f \mapsto X(f)$ из $M(S, S')$ в $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathrm{X}(S'), \mathrm{X}(S))$. Таким образом, последнее отображение биективно. Если отождествить $\Gamma(S)$ (соотв. $\Gamma(S')$) с сопряженным $\mathbf{Z}$-модулем к $\mathrm{X}(S)$ (соотв. к $\mathrm{X}(S')$) (предложение 3), то $\Gamma(f)$ совпадает с гомоморфизмом, сопряженным к $\mathrm{X}(f)$, откуда следует доказываемое предложение.

Замечания. 1) Пусть $f: S \to S'$ — морфизм торов. Змеевидная диаграмма (*Alg.*, chap. X, § 1, n° 2), ассоциированная с (1), дает точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Ker}\,\Gamma(f) \to \mathrm{Ker}\,L(f) \to \mathrm{Ker}\,f \xrightarrow{d} \mathrm{Coker}\,\Gamma(f) \to$$
$$\to \mathrm{Coker}\,L(f) \to \mathrm{Coker}\,f \to 0. \tag{4}$$

В частности, предположим, что морфизм f сюръективен и имеет конечное ядро N. Тогда из точности последовательности

$$0 \to N \xrightarrow{i} S \xrightarrow{f} S' \to 0,$$

где i — каноническое вложение, получаем, что гомоморфизм $L(f)$ биективен. Из точности последовательности (4) следует изоморфизм $N \to \mathrm{Coker}\,\Gamma(f)$, откуда получаем точную последовательность

$$0 \to \Gamma(S) \xrightarrow{\Gamma(f)} \Gamma(S') \to N \to 0. \tag{5}$$

Кроме того, согласно теореме 4 из *Спектр. теор.*, гл. II, § 1, n° 7, последовательность

$$0 \to \mathrm{X}(S') \xrightarrow{\mathrm{X}(f)} \mathrm{X}(S) \xrightarrow{\mathrm{X}(i)} \mathrm{X}(N) \to 0 \tag{6}$$

точна.

2) Согласно предложению 4, отображение $f \mapsto \Gamma(f)(2\pi i)$ из $M(\mathbf{U}, S)$ в $\Gamma(S)$ является изоморфизмом. Если $a \in \mathrm{X}(S) = M(S, \mathbf{U})$ и $f \in M(\mathbf{U}, S)$, то композиция $a \circ f \in M(\mathbf{U}, \mathbf{U})$ есть эндоморфизм $u \mapsto u^r$, где $r = \langle a, \Gamma(f)(2\pi i) \rangle$. В дальнейшем будем отождествлять $M(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathrm{X}(\mathbf{U})$ с $\mathbf{Z}$, так что элемент r из $\mathbf{Z}$ будет соответствовать эндоморфизму $u \mapsto u^r$. Во введенных обозначениях

$$a \circ f = \langle a, \Gamma(f)(2\pi i) \rangle.$$

3) С точной последовательностью $0 \to \Gamma(S) \to L(S) \xrightarrow{\exp_S} S \to 0$ ассоциирован изоморфизм группы $\Gamma(S)$ на фундаментальную группу тора S, называемый в дальнейшем *каноническим*. Для любого морфизма торов $f: S \to S'$ гомоморфизм $\Gamma(f)$ отождествляется при помощи канонических изоморфизмов $\Gamma(S) \to \pi_1(S)$ и $\Gamma(S') \to \pi_1(S')$ с гомоморфизмом $\pi_1(f): \pi_1(S) \to \pi_1(S')$, полученным из f. Это, в частности, дает другую интерпретацию точной последовательности (5) (см. *Top. gen.*, chap. XI).

4) Гомоморфизмы $\mathbf{Z}$-модулей $\delta: \mathrm{X}(S) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(L(S)_{(\mathbf{C})}, \mathbf{C})$ и $\iota: \Gamma(S) \to L(S)_{(\mathbf{C})}$ (ι получен из канонического вложения $\Gamma(S)$ в $L(S)$) продолжаются до изоморфизмов векторных $\mathbf{C}$-пространств

$$u: \mathbf{C} \otimes \mathrm{X}(S) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(L(S)_{(\mathbf{C})}, \mathbf{C}),$$
$$v: \mathbf{C} \otimes \Gamma(S) \to L(S)_{(\mathbf{C})}.$$

В дальнейшем эти изоморфизмы будем называть *каноническими*. Отметим, что если продолжить по $\mathbf{C}$-линейности спаривание между пространствами $\mathrm{X}(S)$ и $\Gamma(S)$ до билинейной формы $\ll\ ,\ \gg$ на $(\mathbf{C} \otimes \mathrm{X}(S)) \times (\mathbf{C} \otimes \Gamma(S))$, то

$$\langle u(a), v(b) \rangle = 2\pi i \ll a, b \gg.$$

3. Веса линейного представления

В этом пункте буква k обозначает поле $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$.

Пусть V — конечномерное векторное пространство над k и $\rho: G \to \mathbf{GL}(V)$ — непрерывное (а следовательно, вещественно-аналитическое, гл. III, § 8, n° 1, теорема 1) представление связной компактной группы Ли G в V. Определим комплексное векторное пространство $\tilde{V}$ и непрерывное отображение $\tilde{\rho}: G \to \mathbf{GL}(\tilde{V})$ следующим образом: если $k = \mathbf{C}$, положим $\tilde{V} = V$, $\tilde{\rho} = \rho$; если $k = \mathbf{R}$, положим $\tilde{V} = V_{\mathbf{C}}$; тогда $\tilde{\rho}$ будет композицией ρ и канонического гомоморфизма $\mathbf{GL}(V) \to \mathbf{GL}(\tilde{V})$.

Для любого $\lambda \in X(G)$ через $\tilde{V}_\lambda(G)$ обозначим векторное подпространство в $\tilde{V}$, состоящее из векторов $v \in \tilde{V}$, таких, что $\tilde{\rho}(g)v = g^\lambda v$ для любого $g \in G$ (см. гл. VII, § 1, n° 1). Тогда (*там же*, предложение 3) сумма пространств $\tilde{V}_\lambda(G)$ (где λ пробегает множество $X(G)$) прямая. Кроме того, верна

Лемма 1. *Если G коммутативна, то $\tilde{V}$ — прямая сумма пространств $\tilde{V}_\lambda(G)$ для $\lambda \in X(G)$.*

Поскольку представление ρ полупросто (§ 1, n° 1), достаточно доказать лемму в случае простоты ρ. В этом случае коммутант Z множества $\tilde{\rho}(G)$ в $\mathrm{End}(\tilde{V})$ состоит из скаляров (*Alg.*, chap. VIII, § 3, n° 2, th. 1). Гомоморфизм $\tilde{\rho}$, следовательно, факторизуется по подгруппе $\mathbf{C}^*.1_V$ группы $\mathbf{GL}(\tilde{V})$, и существует элемент $\lambda \in X(G)$, такой, что $\tilde{V} = \tilde{V}_\lambda(G)$.

Определение 1. *Весами представления ρ группы G относительно максимального тора T в G называются элементы λ из $X(T)$, такие, что $\tilde{V}_\lambda(T) \neq 0$.*

Через $P(\rho, T)$ или $P(\rho)$, если это не вызывает недоразумений по поводу выбора тора T, обозначается множество весов представления ρ относительно T. Согласно лемме 1,

$$\tilde{V} = \bigoplus_{\lambda \in P(\rho, T)} \tilde{V}_\lambda(T). \tag{7}$$

Пусть T' — другой максимальный тор в G и g — элемент из G, такой, что $(\mathrm{Int}\, g)T = T'$ (§ 2, n° 2, теорема 2). Для всех $\lambda \in X(T)$

$$\tilde{\rho}(g)(\tilde{V}_\lambda(T)) = \tilde{V}_{\lambda'}(T'), \text{ где } \lambda' = X(\mathrm{Int}\, g^{-1})(\lambda). \tag{8}$$

Следовательно,

$$X(\mathrm{Int}\, g)(P(\rho, T')) = P(\rho, T). \tag{9}$$

Группа Вейля $W = W_G(T)$ действует слева на $\mathbf{Z}$-модуле $X(T)$ по правилу $w \mapsto X(w^{-1})$. Для $t \in T$, $\lambda \in X(T)$, $w \in W$, имеем $t^{w\lambda} = (w^{-1}(t))^\lambda$.

Предложение 5. *Множество $P(\rho, T)$ устойчиво относительно действия группы Вейля W. Пусть $n \in N_G(T)$, и пусть w — класс элемента n в W. Для $\lambda \in X(T)$ имеют место равенства $\tilde{\rho}(n)(\tilde{V}_\lambda(T)) = \tilde{V}_{w\lambda}(T)$ и* $\dim \tilde{V}_{w\lambda}(T) = \dim \tilde{V}_\lambda(T)$.

Из формулы (9) для $T' = T$, $g = n$ следует, что множество $P(\rho, T)$ устойчиво относительно w. Более того, $\tilde{\rho}(n)$ индуцирует изоморфизм $\tilde{V}_\lambda(T)$ на $\tilde{V}_{w\lambda}(T)$ (формула (8)), откуда вытекает доказываемое предложение.

Предложение 6. *Для того чтобы гомоморфизм $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$ был инъективен, необходимо и достаточно, чтобы множество $P(\rho, T)$ порождало $\mathbf{Z}$-модуль $X(T)$.*

Для того чтобы гомоморфизм ρ был инъективен, необходимо и достаточно, чтобы его ограничение на T было инъективным (§ 2, n° 6, предложение 9). Кроме того, поскольку канонический гомоморфизм $\mathbf{GL}(V) \to \mathbf{GL}(\tilde{V})$ инъективен, можно заменить ρ на $\tilde{\rho}$. Тогда из формулы (7) следует, что ядро представления ρ, ограниченного на T, есть пересечение ядер элементов из $P(\rho, T)$. Таким образом, утверждение вытекает из предложения 2 (n° 1).

Линейное представление $L(\rho)$ алгебры Ли $\mathfrak{t}$ в $\mathfrak{gl}(\tilde{V})$ продолжается до гомоморфизма $\mathbf{C}$-алгебр Ли

$$\tilde{L}(\rho) : \mathfrak{t}_{\mathbf{C}} \to \mathfrak{gl}(\tilde{V}).$$

Напомним, что с любым элементом λ из $X(T)$ ассоциирована (n° 1) линейная форма $\delta(\lambda)$ на $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$, такая, что

$$(\exp_T x)^{\lambda} = e^{\delta(\lambda)(x)}, \quad x \in \mathfrak{t}. \tag{10}$$

Наконец, напомним (гл. VII, § 1, n° 1), что для любого отображения $\mu : \mathfrak{t}_{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ через $\tilde{V}_{\mu}(\mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$ обозначается векторное подпространство в $\tilde{V}$, образованное такими векторами v, что $(\tilde{L}(\rho)(u))(v) = \mu(u).v$ для всех $u \in \mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$.

Тогда из формулы (7) и из предложения 3, гл. VII, § 1, n° 1, получаем

Предложение 7. а) *Для любого* $\lambda \in X(T)$ *имеет место равенство* $\tilde{V}_{\lambda}(T) = \tilde{V}_{\delta(\lambda)}(\mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$.

б) *Отображение* $\delta : X(T) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ *индуцирует биекцию* $P(\rho, T)$ *на множество весов пространства* $\tilde{V}$ *относительно* $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$.

Отметим к тому же, что если определить действие W на $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$, сопоставляя каждому элементу w из W эндоморфизм $L(w)_{\mathbf{C}}$ алгебры $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$, то отображение δ будет согласованно с действием W на $X(T)$ и на $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$.

Предположим теперь, что $k = \mathbf{R}$. Обозначим через σ сопряжение в $\tilde{V}$ относительно V, определяемое по правилу $\sigma(x + iy) = x - iy$ для x, y из V. Для любого комплексного векторного подпространства E в $\tilde{V}$ наименьшим $\mathbf{R}$-пространством в $\tilde{V}$, содержащим E, будет подпространство $E + \sigma(E)$. В частности, для любого $\lambda \in X(T)$ существует вещественное векторное подпространство $V(\lambda)$ в V, такое, что подпространство $V(\lambda)_{(\mathbf{C})}$ в $\tilde{V}$ совпадает с $\tilde{V}_{\lambda}(T) + \tilde{V}_{-\lambda}(T)$ (отметим, что $\sigma(\tilde{V}_{\lambda}(T)) = \tilde{V}_{-\lambda}(T)$). Имеем $V(\lambda) = V(-\lambda)$, и подпространства $V(\lambda)$ суть изотипные компоненты представления группы T в пространстве V, полученного из ρ.

4. Корни

Корнями группы Ли G относительно тора T называются ненулевые веса присоединенного представления этой группы Ли. Множество корней группы Ли G относительно T обозначается через $R(G, T)$ или просто через R, если это не вызывает недоразумений. Согласно предложению 6, отображение

$$\delta: \mathrm{X}(T) \to \mathfrak{t}_{\mathbf{C}}^*$$

(через $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}^*$ обозначается пространство, сопряженное к комплексному векторному пространству $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$) осуществляет биекцию множества $R(G, T)$ на множество корней $R(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$ расщепленной редуктивной алгебры Ли $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$ (гл. VIII, § 2, n° 2, замечание 4). Если для любого $\alpha \in R$ положить

$$\mathfrak{g}^{\alpha} = (\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})_{\alpha}(T) = (\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})_{\delta(\alpha)}(\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}), \tag{11}$$

то каждое подпространство $\mathfrak{g}^{\alpha}$ одномерно над $\mathbf{C}$ (*там же*, теорема 1). Имеем

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbf{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^{\alpha}. \tag{12}$$

Для каждого $\alpha \in R$ обозначим через $V(\alpha)$ двумерное подпространство в $\mathfrak{g}$, такое, что $V(\alpha)_{(\mathbf{C})} = \mathfrak{g}^{\alpha} + \mathfrak{g}^{-\alpha}$. Тогда ненулевыми изотипными компонентами в $\mathfrak{g}$ относительно присоединенного представления группы T будут $\mathfrak{t}$ и подпространства $V(\alpha)$. Пусть K — квадратичная форма, ассоциированная с формой Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда она отрицательна (§ 1, n° 3, предложение 1) и ее ограничение $K(\alpha)$ на $V(\alpha)$ невырожденно и отрицательно. Для любого элемента t из T эндоморфизм $\mathrm{Ad}\, t$ сохраняет форму $K(\alpha)$, откуда получаем морфизм групп Ли

$$\iota_{\alpha}: T \to \mathbf{SO}(K(\alpha)).$$

Стало быть, существует *единственный изоморфизм* $\rho_{\alpha}: \mathbf{U} \to \mathbf{SO}(K(\alpha))$, такой, что $\iota_{\alpha} = \rho_{\alpha} \circ \alpha$. Действительно, пусть X — ненулевой элемент пространства $\mathfrak{g}^{\alpha}$, и пусть Y — образ X при сопряжении в $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ относительно $\mathfrak{g}$. Тогда $Y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, и, полагая $U = X + Y$, $V = i(X - Y)$, получаем базис (U, V) в $V(\alpha)$. В базисе (U, V) матрица эндоморфизма пространства $V(\alpha)$, задаваемого $\mathrm{Ad}\, t$, $t \in T$, есть

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(t^{\alpha}) & -\mathrm{Im}(t^{\alpha}) \\ \mathrm{Im}(t^{\alpha}) & \mathrm{Re}(t^{\alpha}) \end{pmatrix},$$

откуда следует утверждение.

Предложение 8. *Пусть $Q(R)$ — подгруппа в $\mathrm{X}(T)$, порожденная корнями группы Ли G.*

а) *Центр $C(G)$ группы Ли G есть замкнутая подгруппа в T, совпадающая с пересечением ядер корней. Каноническое отображение $\mathrm{X}(T/C(G)) \to \mathrm{X}(T)$ инъективно, и его образ есть $Q(R)$.*

б) *Компактная группа $C(G)$ изоморфна группе, двойственной к дискретной группе $\mathrm{X}(T)/Q(R)$* (*Спектр. теор., гл.* II, § 1, n° 1, определение 2).

в) *Для того чтобы центр $C(G)$ состоял из единичного элемента, необходимо и достаточно, чтобы подгруппа $Q(R)$ совпадала с $\mathrm{X}(T)$.*

Согласно следствию 2 теоремы 2 из § 2, n° 2, подгруппа $C(G)$ содержится в T. Поскольку группа $C(G)$ является ядром присоединенного

представления, то она будет пересечением ядер корней и, стало быть, ортогональным дополнением группы $Q(R)$ в $X(T)$. Тогда предложение следует из *Спектр. теор.*, гл. II, § 1, n° 7, теорема 4, и n° 5, теорема 2.

Предложение 9. *Любой автоморфизм группы Ли G, индуцирующий единичный автоморфизм на T, имеет вид* $\operatorname{Int} t$, *где* $t \in T$.

Предположим сначала, что $C(G)$ сводится к единичному элементу; это значит $X(T) = Q(R)$ (предложение 8). Пусть f — автоморфизм группы Ли G, индуцирующий единичный автоморфизм на T, и $\varphi = L(f)_{\mathbf{C}}$. Тогда φ — автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, индуцирующий единичный автоморфизм на $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$. Согласно предложению 2 из гл. VIII, § 5, n° 2, существует единственный гомоморфизм $\theta\colon Q(R) \to \mathbf{C}^*$, такой, что φ индуцирует на каждом $\mathfrak{g}^\alpha$ гомотетию с коэффициентом $\theta(\alpha)$. Поскольку φ сохраняет вещественную форму $\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, то он коммутирует с сопряжением σ в $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ относительно $\mathfrak{g}$. Кроме того, $\sigma(\mathfrak{g}^\alpha) = \mathfrak{g}^{-\alpha}$, и, следовательно, $\theta(-\alpha) = \overline{\theta(\alpha)}$ для любого $\alpha \in R$. Это означает, что $\theta(\alpha)\overline{\theta(\alpha)} = \theta(\alpha)\theta(-\alpha) = 1$. Из этого следует, что θ принимает значения в $\mathbf{U}$ и, стало быть, отвечает по двойственности элементу t из T, такому, что $(\operatorname{Ad} t)_{(\mathbf{C})} = \varphi$. Значит, $\operatorname{Int} t = f$.

В общем случае проведенные выше рассуждения применимы к группе $G/C(G)$, центр которой состоит из единичного элемента, и к ее максимальному тору $T/C(G)$. Отсюда получаем, что если f — автоморфизм группы G, индуцирующий единичный автоморфизм на T, то существует элемент t из T, такой, что автоморфизмы f и $\operatorname{Int} t$ индуцируют при переходе к фактор-группам один и тот же автоморфизм группы $G/C(C)$. Тогда, поскольку канонический морфизм $D(G) \to G/C(G)$ является конечным накрытием (§ 1, n° 4, следствие 1 предложения 4), f и $\operatorname{Int} t$ индуцируют один и тот же автоморфизм группы $D(G)$, а следовательно, группы $D(G) \times C(G)$ и, стало быть, группы G (*там же*).

Следствие. *Пусть u — автоморфизм группы G и H — замкнутая подгруппа в G, состоящая из неподвижных точек отображения u. Для того чтобы автоморфизм u был внутренним, необходимо и достаточно, чтобы подгруппа H_0 имела максимальный ранг.*

Если автоморфизм u имеет вид $\operatorname{Int} g$, где $g \in G$, то подгруппа $H_0 = Z(g)_0$ имеет максимальный ранг (§ 2, n° 2, следствие 3). Обратно, если H содержит максимальный тор S, то автоморфизм u имеет вид $\operatorname{Int} s$, где $s \in S$ (предложение 9).

5. Узловые векторы и дуальные корни

Лемма 2. *Пусть S — замкнутая подгруппа в T и $Z(S)$ — ее централизатор в G.*

(i) *$R(Z(S)_0, T)$ — множество корней $\alpha \in R(G, T)$, таких, что $\alpha(S) = \{1\}$.*

(ii) *Центр группы* $Z(S)_0$ *есть пересечение подгрупп* $\operatorname{Ker}\alpha$ *для* $\alpha \in R(Z(S)_0, T)$.

(iii) *Если* S *связна, то* $Z(S)$ *связна.*

Алгебра Ли $L(Z(S))_{(\mathbf{C})}$ состоит из элементов, инвариантных относительно действия группы S в $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ (гл. III, § 9, n° 3, предложение 8) и, стало быть, является прямой суммой подалгебры $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$ и подалгебр $\mathfrak{g}^{\alpha}$, для которых $\alpha(S)=\{1\}$, откуда следует (i). Тогда утверждение (ii) вытекает из предложения 8 (n° 4), а утверждение (iii) было уже доказано (§ 2, n° 2, следствие 5 теоремы 2).

Теорема 1. *Пусть* $\alpha \in R(G, T)$. *Централизатор* Z_α *множества* $\operatorname{Ker}\alpha$ *есть связная замкнутая подгруппа в* G. *Центр подгруппы* Z_α *равен* $\operatorname{Ker}\alpha$, *а ее производная группа* $D(Z_\alpha)=S_\alpha$ *является полупростой связной замкнутой подгруппой ранга* 1 *в* G. *Кроме того,* $R(Z_\alpha, T)=\{\alpha, -\alpha\}$ *и* $\dim Z_\alpha = \dim T + 2$.

Пусть Z'_α — централизатор $(\operatorname{Ker}\alpha)_0$. Согласно лемме 2, это связная замкнутая подгруппа в G, а $R(Z'_\alpha, T)$ есть множество корней $\beta \in R(G, T)$, таких, что $\beta((\operatorname{Ker}\alpha)_0)=\{1\}$. Очевидно, что $\{\alpha, -\alpha\} \subset R(Z'_\alpha, T)$. Обратно, пусть $\beta \in R(Z'_\alpha, T)$. Поскольку $(\operatorname{Ker}\alpha)_0$ — подгруппа конечного индекса в $\operatorname{Ker}\alpha$, существует целое число $r \neq 0$, такое, что $t^{r\beta}=1$ для $t \in \operatorname{Ker}\alpha$. Из точности последовательности

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathrm{X}(T) \to \mathrm{X}(\operatorname{Ker}\alpha) \to 0,$$

соответствующей по двойственности точной последовательности

$$0 \to \operatorname{Ker}\alpha \to T \xrightarrow{\alpha} \mathbf{U} \to 0,$$

вытекает, что $r\beta$ кратен α. Согласно теореме 2 (i) из гл. VIII, § 2, n° 2, это означает, что $\beta \in \{\alpha, -\alpha\}$. Таким образом, $R(Z'_\alpha, T)=\{\alpha, -\alpha\}$. Из этого следует (лемма 2), что центр группы Z'_α есть $\operatorname{Ker}\alpha$, и, стало быть, $Z'_\alpha = Z_\alpha$. Наконец, согласно следствию 1 предложения 4 (§ 1, n° 4), $D(Z_\alpha)$ — полупростая связная замкнутая подгруппа в G, ранг которой равен 1, поскольку

$$\mathscr{D}L(Z_\alpha)_{(\mathbf{C})} = \mathfrak{g}^{\alpha} + \mathfrak{g}^{-\alpha} + [\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{-\alpha}].$$

Следствие. *Существует морфизм групп Ли* $\nu: \mathbf{SU}(2, \mathbf{C}) \to G$, *обладающий следующими свойствами:*

а) *Образ морфизма* ν *и ядро корня* α *коммутируют.*

б) $\nu\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} \in T$ *и*

$$\alpha \circ \nu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} = a^2 \text{ для всех } a \in \mathbf{U}.$$

Если ν_1 *и* ν_2 *— два морфизма группы Ли* $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$ *в* G, *обладающие указанными выше свойствами, то существует элемент* $a \in U$, *такой, что* $\nu_2 = \nu_1 \circ \operatorname{Int}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}$.

Согласно теореме 1 и предложению 6 из n° 6, § 3, существует сюръективный морфизм групп Ли $\nu\colon \mathbf{SU}(2, \mathbf{C}) \to S_\alpha$ с дискретным ядром. Тогда $\nu^{-1}(T \cap S_\alpha)$ — максимальный тор в $\mathbf{SU}(2,\mathbf{C})$ (§ 2, n° 3, предложение 1). Поскольку максимальные торы в $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$ сопряжены (§ 2, n° 2, теорема 2), то можно предполагать, заменяя в случае необходимости ν на $\nu \circ \operatorname{Int} s$ (для $s \in \mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$), что $\nu^{-1}(T \cap S_\alpha)$ — подгруппа диагональных матриц в $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$. Тогда для любого $a \in \mathbf{U}$ имеет место включение $\nu\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} \in T$ и отображение

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} \mapsto \alpha \circ \nu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}$$

является корнем группы Ли $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$, а следовательно, совпадает с одним из двух отображений $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} \mapsto a^2$ или $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} \mapsto a^{-2}$ (§ 3, n° 6, формула (19)). В первом случае подходит гомоморфизм ν, во втором случае — гомоморфизм $\nu \circ \operatorname{Int}\theta$ (*там же*, формула (18)).

Если ν_1 и ν_2 — два морфизма группы Ли $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$ в G, удовлетворяющие нужным условиям, то оба они отображают $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$ в S_α (условие a)) и, значит, оба являются универсальными накрытиями группы S_α. Таким образом, существует автоморфизм φ группы $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$, такой, что $\nu_2 = \nu_1 \circ \varphi$, и доказательство завершается применением предложения 9 из n° 4.

Из предыдущего следствия вытекает, что гомоморфизм $\nu_T\colon \mathbf{U} \to T$, определяемый равенством $\nu_T(a) = \nu\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}$, где $a \in \mathbf{U}$, не зависит от выбора ν. Обозначим через $K_\alpha \in \Gamma(T)$ образ при $\Gamma(\nu_T)$ элемента $2\pi i$ из $\Gamma(\mathbf{U}) = 2\pi i\mathbf{Z}$. В дальнейшем будем называть K_α *узловым вектором, ассоциированным с корнем* α. Имеем $\langle \alpha, K_\alpha \rangle = 2$, т. е. (n° 2, формула 2)) $\delta(\alpha)(K_\alpha) = 4\pi i$. Поскольку K_α принадлежит пересечению $\mathfrak{t}$ и $L(S_\alpha)_{(\mathbf{C})}$, то

$$K_\alpha = 2\pi i H_{\delta(\alpha)}, \tag{13}$$

где $H_{\delta(\alpha)}$ — *дуальный корень*, ассоциированный с корнем $\delta(\alpha)$ расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$ (гл. VIII, § 2, n° 2). Иначе говоря, если отождествить $\Gamma(T) \otimes \mathbf{R}$ с группой, двойственной к группе $X(T) \otimes \mathbf{R}$, при помощи спаривания $\langle\ ,\ \rangle$, то узловому вектору K_α будет соответствовать *дуальный корень* $\alpha^\vee \in (X(T) \otimes \mathbf{R})^*$.

Замечание. Для любого $x \in \mathbf{R}$

$$\nu\begin{pmatrix} \exp(2\pi i x) & 0 \\ 0 & \exp(-2\pi i x)\end{pmatrix}=\nu_T(e^{2\pi i x})=\exp(xK_\alpha). \tag{14}$$

В частности,

$$\nu\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}=\nu_T(-1)=\exp\left(\frac{1}{2}K_\alpha\right). \tag{15}$$

Отсюда вытекает, что морфизм ν *инъективен* тогда и только тогда, когда $K_\alpha \notin 2\Gamma(T)$, т. е. когда существует такой элемент $\lambda \in X(T)$, что $\langle \lambda, K_\alpha \rangle \notin 2\mathbf{Z}$. Если алгебра Ли $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ проста, то морфизм ν инъективен, за исключением случая, когда $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ — алгебра Ли типа B_n, $C(G)=\{1\}$ и α — короткий корень (см. гл. VI, таблицы).

На протяжении этого параграфа через $R^\vee(G, T)$ будем обозначать множество узловых векторов K_α для $\alpha \in R(G, T)$. Это — подмножество в $\Gamma(T)$, которое при каноническом вложении $\Gamma(T)$ в $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$ отождествляется с множеством, получаемым с помощью гомотетии с коэффициентом $2\pi i$ из дуальной к $\delta(R)$ системы корней $R^\vee(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{C}})=\{H_{\delta(\alpha)}\}$. Отсюда следует, что множество $R^\vee(G, T)$ порождает векторное $\mathbf{R}$-пространство $L(T \cap D(G))$ и что ортогональное дополнение к $R^\vee(G, T)$ в $X(T)$ есть $X(T/(T \cap D(G)))$.

Обозначим через $\operatorname{Aut}(T)$ группу автоморфизмов группы Ли T. Группа Вейля $W = W_G(T)$ (§ 2, n° 5) отождествляется с некоторой подгруппой группы $\operatorname{Aut}(T)$. С другой стороны, напомним (гл. VIII, § 2, n° 2, замечание 4), что группа Вейля $W(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$ расщепленной редуктивной алгебры Ли $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$ действует в $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$ и, следовательно, каноническим образом отождествляется с подгруппой из $\mathbf{GL}(\mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$.

Предложение 10. *Отображение* $u \mapsto L(u)_{(\mathbf{C})}$ *из* $\operatorname{Aut}(T)$ *в* $\mathbf{GL}(\mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$ *индуцирует изоморфизм группы* W *на группу Вейля расщепленной редуктивной алгебры Ли* $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$. *Группа* $W_{Z_\alpha}(T)$ *имеет порядок* 2 *для любого* $\alpha \in R$, *и образ ее неединичного элемента при предыдущем изоморфизме является отражением* $s_{H_{\delta(\alpha)}}$.

Так как рассматриваемое отображение инъективно, то достаточно показать, что его образ совпадает с $W(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$.

Пусть $g \in N_G(T)$. Используя обозначения из гл. VIII, § 5, n° 2, получаем, что $\operatorname{Ad} g \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{C}}) \cap \operatorname{Int}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$; следовательно, $\operatorname{Ad} g \in \operatorname{Aut}_0(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$ (см. *там же*, n° 5, предложение 11). Согласно предложению 4 n° 2 § 5 той же главы, автоморфизм подалгебры Ли $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$, индуцированный $\operatorname{Ad} g$, пр надлежит $W(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$. Следовательно, образ W в $\mathbf{GL}(\mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$ содержится в $W(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$.

Пусть $\alpha \in R(G, T)$, и пусть $\nu\colon \mathbf{SU}(2, \mathbf{C}) \to G$ — морфизм групп Ли, обладающий свойствами, перечисленными в следствии теоремы 1. Образ элемента ν в $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$ при отображении θ обладает такими свойствами (§ 3, n° 6, формула (17)):

а) $(\operatorname{Int} \nu(\theta))(t)=t$, если $t \in \operatorname{Ker} \alpha$;

б) $(\operatorname{Int} \nu(\theta))(t)=t^{-1}$, если $t \in T \cap S_\alpha$.

Отсюда следует, что $\mathrm{Ad}\,\nu(\theta)$ индуцирует тождественное отображение на $\mathrm{Ker}\,\delta(\alpha)\subset\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$ и отображение $x\mapsto -x$ на $[\mathfrak{g}^{\alpha},\mathfrak{g}^{-\alpha}]$, а следовательно, совпадает с отражением $s_{H_{\delta(\alpha)}}$. Значит, образ группы W содержит все $s_{H_{\delta(\alpha)}}$ и, таким образом, совпадает с $W(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},\mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$. В частности, группа $W_{Z_\alpha}(T)$ имеет порядок 2, т. е. состоит из единицы и $\mathrm{Int}\,\nu(\theta)$. Ч. Т. Д.

Следствие. *Предположим, что группа Ли G полупроста. Тогда любой ее элемент является коммутатором двух ее элементов.*

Пусть c — преобразование Кокстера группы Вейля $W(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},\mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$ (гл. V, § 6, n° 1), и пусть n — элемент из $N_G(T)$, класс которого в W отождествляется с c при помощи изоморфизма, определенного в предложении 10. Обозначим через f_c морфизм $t\mapsto(n,t)$ из T в T. Для $x\in\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$ имеет место равенство

$$L(f_c)_{(\mathbf{C})}(x)=(\mathrm{Ad}\,n)(x)-x=c(x)-x.$$

Согласно теореме 1 из n° 2, § 6, гл. V, эндоморфизм c алгебры Ли $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$ не имеет собственных значений, равных 1. В качестве следствия получаем, что отображение $L(f_c)$ сюръективно, так же как и морфизм f_c. Значит, любой элемент из T является коммутатором двух элементов из G, и, применяя теорему 2 из n° 2 § 2, получаем требуемое утверждение.

6. Фундаментальная группа

В следующем предложении через $f(G,T)$ обозначается гомоморфизм $\Gamma(T)$ в $\pi_1(G)$, полученный композицией канонического изоморфизма $\Gamma(T)$ на $\pi_1(T)$ (n° 2, замечание 3) и гомоморфизма $\pi_1(\iota)$, где ι — каноническое вложение $T\to G$.

Предложение 11. *Гомоморфизм $f(G,T)\colon\Gamma(T)\to\pi_1(G)$ сюръективен. Его ядро является подгруппой $N(G,T)$ в $\Gamma(T)$, порожденной семейством узловых векторов $(K_\alpha)_{\alpha\in R(G,T)}$.*

Гомоморфизм $f(G,T)$ сюръективен, согласно предложению 3 (§ 2, n° 4). Обозначим через $A(G,T)$ утверждение «ядро гомоморфизма $f(G,T)$ порождено векторами K_α», которое нам нужно доказать. Рассмотрим следующие случаи:

a) *Группа Ли G односвязна.* Пусть $\rho\colon\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}\to\mathfrak{gl}(V)$ — линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ в конечномерном комплексном векторном пространстве V. Ограничивая это представление на $\mathfrak{g}$, мы получим представление $\mathfrak{g}$ в вещественном векторном пространстве $V_{[\mathbf{R}]}$. Поскольку G односвязна, существует аналитическое линейное представление π группы Ли G в пространстве $V_{[\mathbf{R}]}$, такое, что $\rho=L(\pi)$. Применяя предложение 7 из n° 3, получаем, что образ $\delta(X(T))$ группы $X(T)$ в $\mathfrak{t}^*_{\mathbf{C}}$ содержит все веса представления ρ в V. Это утверждение справедливо для любого представления ρ алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. Из теоремы 1 n° 2 § 7 гл. VIII вытекает, что $\delta(X(T))$

содержит группу весов системы $\delta(R)$, которая по определению есть множество таких $\lambda \in \mathfrak{t}_{\mathbf{C}}^*$, что $\lambda(H_{\delta(\alpha)}) \in \mathbf{Z}$ для всех $\alpha \in R$, или таких, что $\lambda(K_\alpha) \in 2\pi i \mathbf{Z}$ для всех $\alpha \in R$. Таким образом, группа $X(T)$ содержит все элементы λ из $X(T) \otimes \mathbf{Q}$, такие, что $\langle \lambda, K_\alpha \rangle \in \mathbf{Z}$ для любого $\alpha \in \in R$. По двойственности из этого следует, что группа $\Gamma(T)$ порождена узловыми векторами K_α, откуда получаем утверждение $A(G, T)$.

б) *Группа Ли G есть прямое произведение односвязной группы Ли G' на тор S.* В этом случае T является прямым произведением некоторого максимального тора T' в G' на S, $\Gamma(T)$ отождествляется с $\Gamma(T') \times \Gamma(S)$, $\pi_1(G)$ — с $\pi_1(G') \times \pi_1(S)$ и $f(G, T)$ — с гомоморфизмом, получаемым композицией $f(G', T')$ и $f(S, S)$. Так как гомоморфизм $f(S, S)$ биективен, каноническое отображение $\Gamma(T') \to \Gamma(T)$ биективно отображает $\operatorname{Ker} f(G', T')$ на $\operatorname{Ker} f(G, T)$. Кроме того, векторы K_α принадлежат алгебре Ли производной группы G' группы G и, следовательно, образу $\Gamma(T')$, откуда сразу получаем, что $A(G', T')$ влечет за собой $A(G, T)$. Таким образом, в силу а) утверждение $A(G, T)$ доказано.

в) *Общий случай.* Существует сюръективный морфизм с конечным ядром $p: G' \to G$, где G' является прямым произведением односвязной группы на тор (§ 1, n° 4, предложение 4). Если T' является прообразом T в G' (T' — максимальный тор в G' согласно предложению 1 из n° 3 § 2) и если N — ядро p, то имеют место точные последовательности $0 \to N \to G' \to G \to 0$ и $0 \to N \to T' \to T \to 0$, откуда получаем коммутативную диаграмму с точными строками (n° 2, замечание 1, и *Top. gen.*, chap. XI)

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & \Gamma(T') & \to & \Gamma(T) & \to & N & \to 0 \\
& \downarrow{\scriptstyle f(G',T')} & & \downarrow{\scriptstyle f(G,T)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_N} & \\
0 \to & \pi_1(G') & \to & \pi_1(G) & \to & N & \to 0
\end{array}$$

Из змеевидной диаграммы (*Alg.*, chap. X, p 4, prop. 2) сразу следует, что $A(G', T')$ влечет за собой $A(G, T)$, откуда в силу б) получаем доказательство всего предложения.

Следствие 1. *Для того чтобы G была односвязна, необходимо и достаточно, чтобы семейство $(K_\alpha)_{\alpha \in R(G,T)}$ порождало $\Gamma(T)$.*

Следствие 2. *Пусть H — связная замкнутая подгруппа в G, содержащая T. Тогда имеет место точная последовательность*

$$0 \to N(H, T) \to N(G, T) \to \pi_1(H) \to \pi_1(G) \to 0.$$

Это следует из предложения 2 из *Alg.*, chap. X, p. 4 (змеевидная диаграмма), примененного к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & N(H, T) & \to & \Gamma(T) & \to & \pi_1(H) & \to 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & N(G, T) & \to & \Gamma(T) & \to & \pi_1(G) & \to 0
\end{array}$$

Замечание. Можно показать (см. упражнение 2 из § 5), что группа $\pi_2(G)$ равна нулю. Тогда из точности предыдущей последовательности получаем изоморфизм группы $\pi_2(G/H)$ на группу $N(G, T)/N(H, T)$.

Следствие 3. *Гомоморфизм $\pi_1(D(G)) \to \pi_1(G)$, полученный из вложения $D(G)$ в G, индуцирует изоморфизм $\pi_1(D(G))$ на подгруппу кручения группы $\pi_1(G)$.*

Действительно, $T \cap D(G)$ — максимальный тор в $D(G)$ (§ 2, n° 3, предложение 1в)). Из точности последовательности

$$0 \to \Gamma(T \cap D(G)) \to \Gamma(T) \to \Gamma(T/(T \cap D(G))) \to 0$$

и из предложения 11 вытекает точность последовательности

$$0 \to \pi_1(D(G)) \to \pi_1(G) \to \Gamma(T/(T \cap D(G))) \to 0,$$

откуда, принимая во внимание то, что группа $\pi_1(D(G))$ конечна, а группа $\Gamma(T/(T \cap D(G)))$ свободна, получаем доказываемое следствие.

7. *Подгруппы максимального ранга*

Напомним (гл. VI, § 1, n° 7), что подмножество P в $R = R(G, T)$ называется замкнутым, если $(P + P) \cap R \subset P$, и симметричным, если $P = -P$.

Предложение 12. *Пусть $\mathscr{H}$ — множество связных замкнутых подгрупп в G, содержащих T и упорядоченных по включению. Отображение $H \mapsto R(H, T)$ является сохраняющей порядок биекцией из $\mathscr{H}$ на множество симметричных замкнутых подмножеств из $R(G, T)$, упорядоченных по включению.*

Если $H \in \mathscr{H}$, то $L(H)_{(\mathbf{C})}$ является прямой суммой $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$ и $\mathfrak{g}^\alpha$ для $\alpha \in R(H, T)$. Поскольку $L(H)_{(\mathbf{C})}$ — редуктивная подалгебра в $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, то подмножество $R(H, T)$ в R обладает требуемыми свойствами (гл. VIII, § 3, n° 1, лемма 2 и предложение 2). Обратно, если P — подмножество в R, обладающее этими свойствами, то $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}} \oplus \sum_{\alpha \in P} \mathfrak{g}^\alpha$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ (*там же*), которая является рациональной над $\mathbf{R}$ (n° 3) и, следовательно, имеет вид $\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}$, где $\mathfrak{h}$ — некоторая подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$. Пусть $H(P)$ — интегральная подгруппа в G, определяемая подалгеброй $\mathfrak{x}$. Она замкнута (§ 2, n° 4, замечание 1). Отсюда получаем, что отображения $H \mapsto R(H, T)$ и $P \mapsto H(P)$ сохраняют порядок и обратны друг к другу.

Следствие 1. *Число замкнутых подгрупп в G, содержащих T, конечно.*

Пусть H — такая подгруппа, тогда $H_0 \in \mathscr{H}$ и множество $\mathscr{H}$ конечно. Кроме того, H — подгруппа в $N_G(H_0)$, содержащая H_0, а подгруппа $N_G(H_0)/H_0$ конечна (§ 2, n° 4, предложение 4 и замечание 2).

Следствие 2. *Пусть H — связная замкнутая подгруппа в G, содержащая T, и пусть $W_G^H(T)$ — стабилизатор в $W_G(T)$ подмножества $R(H, T)$ множества R. Группа $N_G(H)/H$ изоморфна факторгруппе $W_G^H(T)/W_H(T)$.*

Из предложения 7 (§ 2, n° 5), примененного к подгруппе $N_G(H)$, вытекает, что $N_G(H)/H$ изоморфна $W_{N(H)}(T)/W_H(T)$, где через $W_{N(H)}(T)$ обозначается множество элементов из $W_G(T)$, представители которых в $N_G(T)$ сохраняют H. Пусть $n \in N_G(T)$, и пусть w — класс элемента n в $W_G(T)$. Согласно предложению 11 из гл. III, § 9, n° 4, n нормализует H тогда и только тогда, когда $(\mathrm{Ad}\, n)(L(H)) = L(H)$. Отсюда и из предложения 5 (n° 3) следует, что подмножество $R(H, T)$ в R устойчиво относительно w. Следствие доказано.

Замечание 1. Группа $W_G^H(T)$ является также стабилизатором в $W_G(T)$ подгруппы $C(H)$ группы T. Это следует из предложения 8 (n° 4).

Предложение 13. *Пусть H — связная замкнутая подгруппа в G максимального ранга и C — ее централизатор. Тогда C содержит центр группы Ли G, а H является связной компонентой единицы централизатора подгруппы C.*

Пусть S — максимальный тор в H. Поскольку центр группы G содержится в S, он содержится в C. Положим $L = Z(C)_0$. Это связная замкнутая подгруппа в G, содержащая H; следовательно, она имеет максимальный ранг, и ее центр равен C. Обозначим через R_H и R_L системы корней относительно S в H и L соответственно. Тогда справедливо включение $R_H \subset R_L \subset R(G, S)$. Так как $C(H) = C(L)$, то из предложения 8 (n° 4) вытекает равенство $Q(R_H) = Q(R_L)$. Кроме того, $Q(R_H) \cap R_L = R_H$ (гл. VI, § 1, n° 7, предложение 23), откуда $R_H = R_L$ и $H = L$ (предложение 12).

Замечание 2. Будем говорить, что подгруппа C группы Ли G *корневая*, если существует максимальный тор S в G и подмножество P в $R(G, S)$, такие, что $C = \bigcap_{\alpha \in P} \mathrm{Ker}\, \alpha$. Из предложения 13 и из леммы 2 n° 5 вытекает, что *отображение $H \mapsto C(H)$ порождает биекцию множества связных замкнутых подгрупп максимального ранга на множество корневых подгрупп группы Ли G*. Обратная биекция есть отображение $C \mapsto Z(C)_0$.

Следствие. *Множество элементов $g \in G$, таких, что $T \cap gTg^{-1} \neq C(G)$, является конечным объединением замкнутых аналитических подмногообразий в G, отличных от G.*

Действительно, положим $A_g = T \cap gTg^{-1}$. Тогда $T \subset Z(A_g)$ и $gTg^{-1} \subset Z(A_g)$. Существует $x \in Z(A_g)$, для которого $xTx^{-1} = gTg^{-1}$ (§ 2, n° 2, теорема 2), откуда вытекает, что $g \in (Z(A_g) . N_G(T)$. Обозначим через $\mathscr{A}$ конечное множество (следствие 1) замкнутых подгрупп в G, содержа-

щих T и отличных от G, и положим $X = \bigcup_{H \in \mathscr{A}} H.N_G(T)$. Это — конечное объединение замкнутых подмногообразий в G, отличных от G. Если $A_g \neq C(G)$, то $Z(A_g) \in \mathscr{A}$ и g принадлежит X. Обратно, если $g \in H.N_G(T)$, где $H \in \mathscr{A}$, то A_g содержит $C(H)$, и, следовательно (предложение 13), $A_g \neq C(G)$.

Предложение 14. *Пусть X — подмножество в T, и пусть R_X — множество корней $\alpha \in R(G, T)$, таких, что $\alpha(X) = \{1\}$. Группа $Z_G(X)/Z_G(X)_0$ изоморфна факторгруппе стабилизатора подмножества X в $W_G(T)$ по подгруппе, порожденной отражениями s_α для $\alpha \in R_X$.*

Положим $H = Z_G(X)$. Поскольку подалгебра Ли $L(H)_{(\mathbf{C})}$ совпадает с множеством точек в $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$, неподвижных относительно Ad (X), то она является суммой $\mathfrak{t}_\mathbf{C}$ и тех $\mathfrak{g}^\alpha$, для которых $\alpha(X) = \{1\}$. В качестве следствия получаем равенство $R(H_0, T) = R_X$, так что группа $W_{H_0}(T)$ порождена отражениями s_α для $\alpha \in R_X$. Доказательство завершается применением предложения 7 из § 2, n° 5.

Ниже (§ 5, n° 3, теорема 1) будет доказано, что если группа Ли G односвязна, а X — одна точка, то централизатор $Z(X)$ связен.

8. Корневые диаграммы

Определение 2. *Корневой диаграммой* (или просто диаграммой, если это не вызывает недоразумений) *называется тройка $D = (M, M_0, R)$, где*

(DR$_0$) *M — свободный $\mathbf{Z}$-модуль конечного типа, а M_0 — подмодуль в M, выделяющийся в нем прямым слагаемым;*

(DR$_\mathrm{I}$) *R — конечное подмножество в M; $R \cup M_0$ порождает векторное $\mathbf{Q}$-пространство $\mathbf{Q} \otimes M$;*

(DR$_\mathrm{II}$) *для любого $\alpha \in R$ существует такой элемент $\alpha^\vee$ из $M^* = \mathrm{Hom}_\mathbf{Z}(M, \mathbf{Z})$, что $\alpha^\vee(M_0) = 0$, $\alpha^\vee(\alpha) = 2$, а эндоморфизм $x \mapsto x - \alpha^\vee(x)\alpha$ модуля M сохраняет подмножество R.*

Согласно гл. VI, § 1, n° 1, для любого $\alpha \in R$ элемент $\alpha^\vee$ из M^* единственным образом определяется элементом α; обозначим через s_α эндоморфизм $x \mapsto x - \alpha^\vee(x)\alpha$ модуля M. Кроме того (см. *там же*), векторное $\mathbf{Q}$-пространство $\mathbf{Q} \otimes M$ является прямой суммой $\mathbf{Q} \otimes M_0$ и векторного подпространства $V(R)$, порожденного R, и R есть система корней в $V(R)$ (см. *там же*, определение 1).

Элементы из R называются *корнями* корневой диаграммы D, а элементы $\alpha^\vee$ из M^* называются *дуальными корнями*. Группа, порожденная автоморфизмами s_α модуля M, называется *группой Вейля* диаграммы D и обозначается через $W(D)$. Ее элементы индуцируют тождественное преобразование на M_0, а на $V(R)$ — преобразования группы Вейля системы корней R.

Примеры. 1) Для любого свободного $\mathbf{Z}$-модуля M конечного типа тройка $(M, M, \varnothing)$ является корневой диаграммой.

2) Если $D=(M, M_0, R)$ — корневая диаграмма, то пусть M_0^* — ортогональное дополнение к $V(R)$ в M^*, и пусть $R^\vee$ — множество дуальных корней для D. Тогда $D=(M^*, M_0^*, R^\vee)$ — корневая диаграмма, называемая *дуальной* к D. Для любого $\alpha \in R$ симметрия $s_\alpha^\vee$ множества M^* является автоморфизмом, контрагредиентным к симметрии s_α множества M. Отображение $w \mapsto {}^t w^{-1}$ есть изоморфизм $W(D)$ на $W(D^\vee)$. Кроме того, $V(R^\vee)$ естественным образом отождествляются с пространством, сопряженным к векторному $\mathbf{Q}$-пространству $V(R)$; тем самым $R^\vee$ отождествляется с системой корней, дуальной к R.

Если отождествить пространство, сопряженное к M^*, с M, то диаграммой, дуальной к $D^\vee$, будет D.

3) Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — редуктивная расщепленная $\mathbf{Q}$-алгебра Ли и $M \subset \mathfrak{h}$ — *дозволенная решетка* (гл. VIII, § 12, n° 6, определение 1). Пусть M_0 — подгруппа в M, ортогональная корням расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, и пусть $R^\vee$ — множество H_α, $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Тогда $(M, M_0, R^\vee)$ — корневая диаграмма, а $(M^*, M_0^*, R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$ — дуальная к ней диаграмма.

4) Пусть V — векторное пространство над $\mathbf{Q}$ и R — система корней в V. Обозначим через $P(R)$ группу весов системы R, а через $Q(R)$ — группу радикальных весов этой системы (гл. VI, § 1, n° 9). Тогда $(Q(R), 0, R)$ и $(P(R), 0, R)$ — корневые диаграммы. Для того чтобы диаграмма (M, M_0, S) была изоморфна диаграмме вида $(Q(R), 0, R)$ (соотв. вида $(P(R), 0, R)$), необходимо и достаточно, чтобы модуль M был порожден системой S (соотв. чтобы модуль M^* был порожден системой $S^\vee$).

Для любой подгруппы X в $P(R)$, содержащей $Q(R)$, $(X, 0, R)$ является корневой диаграммой, и тем самым мы получаем с точностью до изоморфизма все диаграммы (M, M_0, S), такие, что $M_0=0$, т. е. такие, что S порождает подгруппу конечного индекса в M.

Говорят, что корневая диаграмма (M, M_0, R) *приведенная*, если система корней R обладает этим свойством (т. е. (гл. VI, § 1, n° 4) если соотношения $\alpha, \beta \in R$, $\lambda \in \mathbf{Z}$, $\beta = \lambda\alpha$ влекут за собой $\lambda = 1$ или $\lambda = -1$). Диаграммы из примеров 1) и 3) приведенные.

9. Компактные группы Ли и корневые диаграммы

В терминологии предыдущего пункта можно резюмировать важную часть результатов из пп° 4 и 5 в следующей теореме:

Теорема 2. а) $(\mathrm{X}(T), \mathrm{X}(T/(T \cap D(G))), R(G, T))$ — *приведенная корневая диаграмма; ее группа Вейля состоит из* $\mathrm{X}(w)$, *где* $w \in W$. *Группа* $\mathrm{X}(C(G))$ *изоморфна факторгруппе группы* $\mathrm{X}(T)$ *по подгруппе, порожденной системой* $R(G, T)$.

б) $(\Gamma(T), \Gamma(C(G)_0), R^\vee(G, T))$ — *приведенная корневая диаграмма, ее группа Вейля состоит из* $\Gamma(w)$, *где* $w \in W$. *Группа* $\pi_1(G)$ *изоморфна факторгруппе группы* $\Gamma(T)$ *по подгруппе, порожденной системой* $R^\vee(G, T)$.

в) *Если отождествить каждый из* $\mathbf{Z}$*-модулей* $X(T)$ *и* $\Gamma(T)$ *с сопряженным к другому* (n° 2, предложение 3), *то каждая из предыдущих корневых диаграмм отождествляется с дуальной диаграммой к другой.*

Обозначим через $D^*(G, T)$ диаграмму $(X(T), X(T/(T\cap D(G))), R(\Gamma, T))$ и через $D_*(G, T)$ диаграмму $(\Gamma(T), \Gamma(C(G)_0), R^\vee(G, T))$; говорят, что это соответственно *контравариантная диаграмма* и *ковариантная диаграмма* группы Ли G (относительно T).

Примеры. 1) Если группа Ли G полупроста и имеет ранг 1, то $D^*(G, T)$ и $D_*(G, T)$ обязательно изоморфны одной из двух диаграмм $\Delta_2 = (\mathbf{Z}, 0, \{2, -2\})$, $\Delta_1 = (\mathbf{Z}, 0, \{1, -1\})$. Если группа Ли G изоморфна $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$, то диаграмма $D_*(G, T)$ изоморфна Δ_1 (поскольку G односвязна); следовательно, $D^*(G, T)$ изоморфна Δ_2. Если группа G изоморфна $\mathbf{SO}(3, \mathbf{R})$, то диаграмма $D_*(\Gamma, \mathrm{T})$ изоморфна Δ_1 (поскольку $C(G) = \{1\}$), а значит, $D_*(G, T)$ изоморфна Δ_2.

2) Если G и G' — две связные компактные группы Ли с максимальными торами T и T' соответственно и если $D^*(G, T) = (M, M_0, R)$ и $D^*(G', T') = (M', M'_0, R')$, то $D^*(G \times G', T \times T')$ отождествляется с $(M \oplus M', M_0 \oplus M'_0, R \cup R')$. Аналогичное утверждение имеет место для ковариантных диаграмм.

3) Пусть N — замкнутая подгруппа в T, центральная в G, и пусть (M, M_0, R) — контравариантная диаграмма группы G относительно T. Тогда контравариантная диаграмма группы Ли G/N относительно T/N отождествляется с (M', M'_0, R), где M' — подгруппа в M, состоящая из таких λ, что $\lambda(N) = \{1\}$ и $M'_0 = M' \cap M_0$.

4) Аналогично пусть N — конечная коммутативная группа, и $\varphi\colon \pi_1(G) \to N$ — сюръективный гомоморфизм. Пусть G' — накрывающая группы Ли G, ассоциированная с этим гомоморфизмом. Это связная компактная группа Ли, причем N — ее центральная подгруппа (*Top. gen.*, chap. XI), а G естественным образом отождествляется с G'/N. Пусть T' — максимальный тор в G', являющийся прообразом T. Если (P, P_0, S) — ковариантная диаграмма группы Ли G относительно T, то ковариантная диаграмма группы Ли G' относительно T' отождествляется с (P', P'_0, S), где P' — ядро гомоморфизма $\varphi \circ f(G, T)\colon P \to N$ (см. n° 6, предложение 11), а $P'_0 = P_0 \cap P'$.

Замечания. 1) Пусть $\mathfrak{c}$ — центр алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. Тогда $\mathfrak{c} = L(C(G))_{(\mathbf{C})}$. Имеют место следующие соотношения между диаграммами группы Ли G относительно T и системами дуальных и прямых корней редуктивной расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$:

а) Канонический изоморфизм $\mathbf{C} \otimes \Gamma(T)$ на $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$ индуцирует биекцию $\mathbf{C} \otimes \Gamma(C(G)_0)$ на $\mathfrak{c}$ и биекцию $1 \otimes R^\vee(G, T)$ на $2\pi i . R^\vee(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$.

б) Канонический изоморфизм $\mathbf{C} \otimes X(T)$ на пространство $\overset{*}{\mathfrak{t}}_{\mathbf{C}}$, сопряженное к $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$, индуцирует биекцию $\mathbf{C} \otimes X(T/(T \cap D(G)))$ на ортогональное дополнение к $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}} \cap \mathscr{D}(\mathfrak{g})_{\mathbf{C}}$ и биекцию $1 \otimes R(G, T)$ на $R(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$.

2) Предположим, что G — полупростая группа Ли. Обозначим через R (соотв. $R^\vee$) систему корней $R(G, T)$ (соотв. $R^\vee(G, T)$), так что имеют место следующие включения:

$$Q(R) \subset \mathrm{X}(T) \subset P(R), \quad Q(R^\vee) \subset \Gamma(T) \subset P(R^\vee).$$

Конечные коммутативные группы $P(R)/Q(R)$ и $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ находятся в двойственности (гл. VI, § 1, n° 9). Если через $M^\wedge$ обозначить группу, двойственную к конечной коммутативной группе M, то из сказанного ранее получаем *канонические изоморфизмы*

$$\Gamma(T)/Q(R^\vee) \to \pi_1(G), \quad P(R^\vee)/\Gamma(T) \to C(G),$$
$$P(R)/\mathrm{X}(T) \to (\pi_1(G))^\wedge, \quad \mathrm{X}(T)/Q(R) \to (C(G))^\wedge.$$

В частности, *произведение порядков групп* $\pi_1(G)$ *и* $C(G)$ *равно индексу связности системы* $R(G, T)$ (*там же*).

Пусть теперь G' — другая связная компактная группа Ли и T' — максимальный тор в G'. Пусть $f\colon G \to G'$ — изоморфизм групп Ли, такой, что $f(T) = T'$; обозначим через f_T изоморфизм между T и T', определяемый изоморфизмом f. Тогда $\mathrm{X}(f_T)$ есть изоморфизм $D^*(G', T')$ на $D^*(G, T)$, обозначаемый через $D^*(f)$, а $\Gamma(f_T)$ — изоморфизм $D_*(G, T)$ на $D_*(G', T')$, обозначаемый через $D_*(f)$. Если $t \in T$ и если положить $d = f \circ \mathrm{Int}\, t = (\mathrm{Int}\, f(t)) \circ f$, то $D^*(g) = D^*(f)$, $D_*(g) = D_*(f)$.

Предложение 15. *Пусть* φ — *изоморфизм* $D^*(G', T')$ *на* $D^*(G, T)$ (соотв. $D_*(G, T)$ *на* $D_*(G', T')$). *Существует изоморфизм* $f\colon G \to G'$, *такой, что* $f(T) = T'$ *и* $\varphi = D^*(f)$ (соотв. $\varphi = D_*(f)$). *Если* f_1 *и* f_2 — *два таких изоморфизма, то существует элемент* t *из* T, *такой, что* $f_2 = f_1 \circ \mathrm{Int}\, t$.

Второе утверждение сразу следует из предложения 9 (n° 4); докажем первое утверждение, например, для ковариантных диаграмм. Обозначим через $\mathfrak{g}'$ (соотв. $\mathfrak{t}'$) алгебру Ли группы Ли G' (соотв. T'), а через $\mathfrak{g}'_{\mathbf{C}}$ (соотв. $\mathfrak{t}'_{\mathbf{C}}$) ее комплексификацию. Согласно теореме 2 (i) из гл. VIII, § 4, n° 4, существует изоморфизм $\psi\colon \mathfrak{g}_{\mathbf{C}} \to \mathfrak{g}'_{\mathbf{C}}$, который отображает $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$ в $\mathfrak{t}'_{\mathbf{C}}$ и индуцирует на $\Gamma(T) \subset \mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$ заданный изоморфизм $\varphi\colon \Gamma(T) \to \Gamma(T')$. Тогда $\mathfrak{g}$ и $\psi^{-1}(\mathfrak{g}')$ — две компактные вещественные формы алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, которые имеют одно и то же пересечение $\mathfrak{t}$ с $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$. Согласно предложению 3 из § 3, n° 2, существует внутренний автоморфизм θ алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, индуцирующий тождественное преобразование на $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$ и такой, что $\theta(\mathfrak{g}) = \psi^{-1}(\mathfrak{g}')$. Заменяя ψ на $\psi \circ \theta$, можно предполагать, что ψ отображает $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}'$. Кроме того, согласно предложению 4 из n° 2, существует единственный морфизм $f_T\colon T \to T'$, такой, что $\Gamma(f_T) = \varphi$. Тогда ограничение φ на $\mathfrak{t}$ есть $L(f_T)$, и ввиду предложения 8 из § 2, n° 6, существует единственный морфизм $f\colon G \to G'$, индуцирующий f_T на T и ψ на $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. Применяя сказанное выше к φ^{-1} и ψ^{-1}, можно построить морфизм, обратный к морфизму f, который, следовательно, является изоморфизмом. Далее, $D_*(f) = \Gamma(f_T) = \varphi$, откуда следует доказываемое предложение.

Отметим, что если T и T' — два максимальных тора в G, то диаграммы $D^*(G, T)$ и $D^*(G, T')$ изоморфны (если элемент $g \in G$ обладает свойством $gTg^{-1} = T'$, то $\operatorname{Int} g$ является изоморфизмом G на G, отображающим T на T'). Обозначим через $D^*(G)$ класс диаграмм, изоморфных диаграмме $D^*(G, T)$ (см. *Th. ens.*, chap II, p. 47); это корневая диаграмма, которая зависит только от группы Ли G и которую называют ее контравариантной диаграммой. Аналогично определяется ковариантная диаграмма $D_*(G)$ группы G, откуда получаем

Следствие. *Для того чтобы связные компактные группы Ли G и G' были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы диаграммы $D^*(G)$ и $D^*(G')$* (соотв. *$D_*(G)$ и $D_*(G')$*) *были равны.*

Предложение 16. *Для любой приведенной корневой диаграммы D существует связная компактная группа Ли G, такая, что $D^*(G)$* (соотв. *$D_*(G)$*) *изоморфна D.*

а) Заменяя, если нужно, D на дуальную диаграмму, мы приходим к построению такой группы G, что $D^*(G)$ изоморфна D. Положим $D = (M, M_0, R)$; тогда $\mathbf{Q} \otimes M$ является прямой суммой $\mathbf{Q} \otimes M_0$ и векторного подпространства $V(R)$, порожденного системой R. Кроме того, поскольку дуальные корни принимают целые значения на M, проекция M в $V(R)$ параллельно $\mathbf{Q} \otimes M_0$ содержится в группе весов $P(R)$ системы R, так что M — подгруппа конечного индекса в $M_0 \oplus P(R)$. Обозначим через D' диаграмму $(M_0 \oplus P(R), M_0, R)$.

б) Пусть $\mathfrak{a}$ — полупростая комплексная алгебра Ли с канонической системой корней, изоморфной $R \subset \mathbf{C} \otimes V(R)$ (гл. VIII, § 4, n° 3), и пусть $\mathfrak{g}_1$ — компактная вещественная форма алгебры Ли $\mathfrak{a}$ (§ 3, n° 2, теорема 1). Пусть G_1 — односвязная вещественная группа Ли с алгеброй Ли, изоморфной $\mathfrak{g}_1$; тогда G_1 компактна (§ 1, n° 4, теорема 1). Пусть T_1 — максимальный тор в G_1. Согласно теореме 1, диаграмма $D^*(G_1, T_1)$ изоморфна $(P(R), 0, R)$.

в) Пусть T_0 — тор размерности, равной рангу M_0. Тогда диаграмма $D^*(T_0, T_0)$ изоморфна $(M_0\, M_0, \varnothing)$, а диаграмма $D^*(G_1 \times T_0, T_1 \times T_0)$ изоморфна D' (пример 2).

г) Пусть, наконец, N — конечная подгруппа в $T_1 \times T_0$, ортогональная к M. Положим $G = (G_1 \times T_0)/N$, $T = (T_1 \times T_0)/N$. Тогда G — связная компактная группа Ли, T — максимальный тор в G и $D(G, T)$ изоморфна D (пример 3).

Схолия. Классификация связных компактных групп Ли с точностью до изоморфизма сводится к классификации приведенных корневых диаграмм. Полупростые связные компактные группы Ли соответствуют тем приведенным корневым диаграммам (M, M_0, R), для которых $M_0 = 0$. Задание такой диаграммы эквивалентно заданию приведенной системы корней R в векторном пространстве V над $\mathbf{Q}$ и такой подгруппы M в V, что $Q(R) \subset M \subset P(R)$.

Замечание 3. Пусть T' — другой максимальный тор в G и B (соотв. B') — базис системы корней $R(G, T)$ (соотв. $R(G', T')$) (гл. VI, § 1, n° 5, определение 2). Существуют такие элементы $g \in G$, что $\operatorname{Int} g$ переводит T в T' и B в B', и все эти элементы лежат в одном классе по модулю $\operatorname{Int}(T)$ (поскольку T и T' сопряжены, можно предполагать, что $T = T'$, и достаточно применить замечание 4, n° 5, и предложение 9, n° 4, из гл. VI, § 1). Отсюда следует, что изоморфизм T на T', полученный из $\operatorname{Int} g$, не зависит от выбора g; в качестве следствия получаем аналогичное утверждение для $D_*(\operatorname{Int} g)$ и $D^*(\operatorname{Int} g)$. Таким образом, перефразируя mutatis mutandis замечание 2 из гл. VIII, § 5, n° 3, определим канонический максимальный тор в группе Ли G, канонические ковариантные и контравариантные корневые диаграммы этой группы Ли, ...

10. Автоморфизмы связной компактной группы Ли

Обозначим через $\operatorname{Aut}(G)$ группу Ли автоморфизмов группы G (гл. III, § 10, n° 2), а через $\operatorname{Aut}(G, T)$ замкнутую подгруппу в $\operatorname{Aut}(G)$, состоящую из таких элементов u, что $u(T) = T$. Известно (§ 1, n° 4, следствие 5 предложения 4), что связная компонента единицы группы $\operatorname{Aut}(G)$ есть подгруппа $\operatorname{Int}(G)$ внутренних автоморфизмов. Обозначим через $\operatorname{Int}_G(H)$ образ в $\operatorname{Int}(G)$ подгруппы H группы G.

Пусть D — ковариантная диаграмма группы G относительно T; обозначим через $\operatorname{Aut}(D)$ группу ее автоморфизмов, а через $W(D)$ ее группу Вейля. Отображение $u \mapsto D_*(u)$ является гомоморфизмом $\operatorname{Aut}(G, T)$ в $\operatorname{Aut}(D)$. Из предложения 15 (n° 9) непосредственно получаем

Предложение 17. *Гомоморфизм* $\operatorname{Aut}(G, T) \to \operatorname{Aut}(D)$ *сюръективен и его ядром является* $\operatorname{Int}_G(T)$.

Отметим, что $\operatorname{Aut}(G, T) \cap \operatorname{Int}(G) = \operatorname{Int}_G(N_G(T))$ и что образ группы $\operatorname{Int}_G(N_G(T))$ в $\operatorname{Aut}(D)$ есть $W(D)$ (n° 5, предложение 10). Из предложения 17 получаем изоморфизм

$$\operatorname{Aut}(G, T)/(\operatorname{Aut}(G, T) \cap \operatorname{Int}(G)) \to \operatorname{Aut}(D)/W(D).$$

Кроме того, $\operatorname{Aut}(G) = \operatorname{Int}(G).\operatorname{Aut}(G, T)$. Действительно, если u принадлежит группе $\operatorname{Aut}(G)$, то $u(T)$ — максимальный тор в G и, следовательно, сопряжен с T; таким образом, существует внутренний автоморфизм v группы Ли G, такой, что $v(T) = u(T)$, т. е. такой, что $v^{-1} u \in \operatorname{Aut}(G, T)$. Отсюда вытекает, что группа $\operatorname{Aut}(G)/\operatorname{Int}(G)$ отождествляется с группой $\operatorname{Aut}(G, T)/(\operatorname{Aut}(G, T) \cap \operatorname{Int}(G))$, и, значит, принимая во внимание сказанное ранее, мы приходим к точной последовательности

$$1 \to \operatorname{Int}(G) \to \operatorname{Aut}(G) \to \operatorname{Aut}(D)/W(D) \to 1. \qquad (16)$$

В качестве следствия получаем

Предложение 18. *Группа* $\operatorname{Aut}(G)/\operatorname{Int}(G)$ *изоморфна группе* $\operatorname{Aut}(D)/W(D)$.

Предположим, в частности, что группа Ли G полупроста. Тогда группа $\mathrm{Aut}(D)$ отождествляется с подгруппой в $A(R(G, T))$ (гл. VI, § 1, n° 1), состоящей из таких элементов u, что $u(\mathrm{X}(T)) \subset \mathrm{X}(T)$, а подгруппа $W(D)$ отождествляется с $W(R(G, T))$.

Следствие. *Если группа G односвязна или если $C(G)$ состоит из единичного элемента, то группа $\mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Int}(G)$ изоморфна группе автоморфизмов графа Дынкина системы $R(G, T)$.*

Это вытекает из сказанного выше и из следствия предложения 1 гл. VI, § 4, n° 2.

Теперь мы покажем, что расширение (16) допускает *сечения.*

Для любого $\alpha \in R(G, T)$ обозначим через $V(\alpha)$ такое двумерное векторное подпространство в $\mathfrak{g}$, что $V(\alpha)_{(\mathbf{C})} = \mathfrak{g}^{\alpha} + \mathfrak{g}^{-\alpha}$. Обозначим через K квадратичную форму, ассоциированную с формой Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Определение 3. *Разметкой пары (G, T) называется пара $(B, (\mathrm{U}_{\alpha})_{\alpha \in B})$, где B — базис системы $R(G, T)$* (гл. VI, § 1, n° 5, определение 2) *и где U_{α} для любого $\alpha \in B$ — такой элемент пространства $V(\alpha)$, что $K(\mathrm{U}_{\alpha}) = -1$.*

Разметкой группы Ли G называется задание максимального тора T в G и разметки пары (G, T).

Лемма 3. *Пусть B_0 — базис системы $R(G, T)$. Группа $\mathrm{Int}_G(T)$ действует просто транзитивно на множестве разметок пары (G, T), имеющих вид $(B_0, (\mathrm{U}_{\alpha})_{\alpha \in B_0})$.*

Для любого $\alpha \in B_0$ обозначим через $K(\alpha)$ ограничение на $V(\alpha)$ квадратичной формы K. Действие T на $V(\alpha)$ определяет морфизм $\iota_{\alpha}\colon T \to \mathbf{SO}(K(\alpha))$. В n° 4 было показано, что $\mathbf{SO}(K(\alpha))$ отождествляется с $\mathbf{U}$ таким образом, что ι_{α} отождествляется с корнем α. Поскольку B_0 — базис системы R, то это базис и $\mathbf{Z}$-модуля $Q(R)$, порожденного корнями; следовательно, B_0 — базис подмодуля $\mathrm{X}(T/C(G))$ в $\mathrm{X}(T)$. Отсюда вытекает, что морфизм, являющийся произведением морфизмов ι_{α}, индуцирует изоморфизм $T/C(G)$ на произведение групп $\mathbf{SO}(K(\alpha))$, которое действует просто транзитивно на множестве разметок пары (G, T), первая компонента которых есть B_0.

Предложение 19. *Группа $\mathrm{Int}(G)$ действует на множестве разметок группы Ли G просто транзитивно.*

Пусть $e = (T, B, (\mathrm{U}_{\alpha}))$ и $e' = (T', B', (\mathrm{U}'_{\alpha}))$ — две разметки группы G. Существуют элементы g из G, такие, что $(\mathrm{Int}\, g)(T) = T'$; эти элементы лежат в одном классе по модулю $N_G(T)$. Следовательно, можно предполагать, что $T = T'$, и остается доказать, что существует единственный элемент из $\mathrm{Int}_G(N_G(T))$, переводящий e в e'. Согласно замечанию 4 из гл. VI, § 1, n° 5,

существует единственный элемент w из $W(R)$, такой, что $w(B)=B'$. Поскольку $W(R)$ отождествляется с $N_G(T)/T$, существует элемент $n \in N_G(T)$, такой, что $w = \operatorname{Int} n$, и n однозначно определяется по модулю группы T. Таким образом, можно предполагать, что $B=B'$, и остается доказать, что существует единственный элемент из $\operatorname{Int}_G(T)$, переводящий e в e', а это есть не что иное, как лемма 3.

Следствие. *Пусть e — разметка пары (G, T), и пусть E — группа автоморфизмов группы Ли G, оставляющих на месте e. Тогда $\operatorname{Aut}(G)$ является полупрямым произведением E на $\operatorname{Int}(G)$, а $\operatorname{Aut}(G, T)$ — полупрямым произведением E на $\operatorname{Int}(G) \cap \operatorname{Aut}(G, T) = \operatorname{Int}_G(N_G(T))$.*

Действительно, любой элемент из $\operatorname{Aut}(G)$ переводит e в некоторую разметку группы Ли G. Согласно предложению 19, любой класс в $\operatorname{Aut}(G)$ по подгруппе $\operatorname{Int}(G)$ пересекается с E и притом только по одной точке, откуда следует первое утверждение. Второе утверждение доказывается аналогично.

Замечание. Пусть G и G' — две связные компактные группы Ли, и пусть $e=(T, B, (U_\alpha))$ и $e'=(T', B', (U'_{\alpha'}))$ — разметки групп Ли G и G' соответственно. Пусть X — множество изоморфизмов G на G', переводящих e в e'. Отображение $f \mapsto D^*(f)$ (соотв. $D_*(f)$) является биекцией X на множество изоморфизмов $D^*(G', T')$ на $D^*(G, T)$ (соотв. $D_*(G, T)$ на $D_*(G', T')$), переводящих B' в B (соотв. B в B'). Это сразу следует из предложения 15 и леммы 3.

§ 5. Классы сопряженности

Обозначения § 4 сохраняются.

1. Регулярные элементы

Согласно следствию 4 теоремы 2 из § 2, n° 2, *регулярные* элементы g группы Ли G можно охарактеризовать одним из следующих свойств:

а) Подалгебра в $\mathfrak{g}$, состоящая из неподвижных элементов относительно преобразования $\operatorname{Ad} g$, является подалгеброй Картана.

б) $Z(g)_0$ — максимальный тор в G.

Множество регулярных элементов группы Ли G открыто и плотно в G.

На протяжении этого параграфа через G_r (соотв. T_r) обозначается множество элементов группы Ли G (соотв. T), регулярных в G. Для того чтобы элемент g из G принадлежал T_r, необходимо и достаточно, чтобы $Z(g)_0$ совпадал с T. Любой элемент из G_r сопряжен к некоторому элементу из T_r (§ 2, n° 2, теорема 2).

Для того чтобы элемент t из T принадлежал T_r, необходимо и достаточно, чтобы для любого корня $\alpha \in R(G, T)$ выполнялось условие $t^\alpha \neq 1$, следовательно, $T - T_r$ является объединением подторов $\operatorname{Ker} \alpha$, где α пробегает $R(G, T)$.

Предложение 1. *Положим* $n = \dim G$. *Существует компактное вещественно-аналитическое многообразие* V *размерности* $n-3$ *и аналитическое отображение* $\varphi\colon V \to G$, *образ которого есть* $G - G_r$.

Пусть $\alpha \in R(G, T)$; положим $V_\alpha = (G/Z(\operatorname{Ker}\alpha)) \times (\operatorname{Ker}\alpha)$, и пусть φ_α— морфизм из V_α в G, такой, что для любого $g \in G$ и любого $t \in \operatorname{Ker}\alpha$ имеем $\varphi_\alpha(\bar{g}, t) = gtg^{-1}$ (через $\bar{g}$ обозначается класс элемента g по модулю $Z(\operatorname{Ker}\alpha)$). Тогда V_α— компактное вещественно-аналитическое многообразие размерности

$$\dim V_\alpha = \dim G - \dim Z(\operatorname{Ker}\alpha) + \dim \operatorname{Ker}\alpha = \\ = n - (\dim T + 2) + (\dim T - 1) = n - 3$$

(§ 4, n° 5, теорема 1), φ_α— морфизм вещественно-аналитических многообразий, а образ φ_α состоит из элементов группы Ли G, сопряженных к некоторому элементу из $\operatorname{Ker}\alpha$. Тогда в качестве V достаточно взять сумму многообразий V_α, а в качестве φ — морфизм, индуцирующий φ_α на каждом V_α.

Замечание. Назовем *вполне регулярными* такие элементы g группы Ли G, что $Z(g)$ является максимальным тором в G. Если $g \in T$, то g вполне регулярен тогда и только тогда, когда $w(g) \neq g$ для любого неединичного элемента w из $W_G(T)$ (§ 4, n° 7, предложение 14). Таким образом, множество вполне регулярных элементов группы Ли G является открытым всюду плотным в ней подмножеством (§ 2, n° 5, следствие 2 предложения 5).

2. Камеры и альковы

Обозначим через $\mathfrak{t}_r$ множество элементов $x \in \mathfrak{t}$, таких, что элемент $\exp x$ регулярен, т. е. принадлежит T_r. Для того чтобы элемент x из $\mathfrak{t}$ принадлежал $\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_r$, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой корень $\alpha \in R(G, T)$, что $\delta(\alpha)(x) \in 2\pi i\,\mathbf{Z}$. Для каждого корня $\alpha \in R(G, T)$ и каждого целого числа n обозначим через $H_{\alpha,n}$ множество таких $x \in \mathfrak{t}$, что $\delta(\alpha)(x) = 2\pi i n$. Множества $H_{\alpha,n}$ называются *сингулярными гиперплоскостями в* $\mathfrak{t}$, а $\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_r$ есть объединение сингулярных гиперплоскостей. *Альковами* алгебры Ли $\mathfrak{t}$ называются связные компоненты множества $\mathfrak{t}_r$, а *камерами* — связные компоненты дополнения в $\mathfrak{t}$ к объединению сингулярных гиперплоскостей, проходящих через начало координат (т. е. гиперплоскостей $H_{\alpha,0} = \operatorname{Ker}\delta(\alpha)$, $\alpha \in R(G, T)$).

Имеем $\Gamma(T) \subset \mathfrak{t} - \mathfrak{t}_r$. Через $N(G, T)$ обозначим подгруппу в $\Gamma(T)$, порожденную узловыми векторами (§ 4, n° 5). Согласно предложению 11 из § 4, n° 6, факторгруппа $\Gamma(T)/N(G, T)$ отождествляется с фундаментальной группой группы Ли G.

Наконец, через W обозначим группу Вейля группы Ли G относительно тора T, рассматриваемую как группу автоморфизмов группы Ли T и алгебры Ли $\mathfrak{t}$, а через W_a (соотв. W'_a) — группу автоморфизмов аффинного

пространства $\mathfrak{t}$, порожденную группой W и сдвигами t_γ: $x \mapsto x+\gamma$ для $\gamma \in N(G, T)$ (соотв. для $\gamma \in \Gamma(T)$).

Пусть $w \in W$, $\gamma \in \Gamma(T)$, $\alpha \in R(G, T)$ и $n \in \mathbf{Z}$. Тогда

$$w(H_{\alpha,\,n}) = H_{w\alpha,\,n}, \qquad t_\gamma(H_{\alpha,\,n}) = H_{\alpha,\,n+\langle\gamma,\,\alpha\rangle}.$$

Отсюда получаем, что $w(C)$ есть камера для любой камеры C и любого элемента $w \in W$ и $w(A)$ — альков для любого алькова A и любого $w \in W'_a$. Отметим, что если отождествить $\mathrm{X}(T) \otimes \mathbf{R}$ с $\mathfrak{t}^*$ при помощи изоморфизма $(2\pi i)^{-1}\delta$, то альковы алгебры Ли $\mathfrak{t}$ и группа W_a являются соответственно альковами и аффинной группой Вейля, ассоциированными с системой корней $R(G, T)$ (гл. VI, § 2, n° 1).

Предложение 2. а) *Группа W_a* (соотв. W'_a) *является полупрямым произведением группы W на группу $N(G, T)$* (соотв. $\Gamma(T)$). *Подгруппа W_a группы W'_a нормальна.*

б) *Группа W* (соотв. W_a) *действует просто транзитивно на множестве камер* (соотв. *альковов*).

в) *Пусть C — камера, а A — альков. Тогда $\bar{C}$* (соотв. $\bar{A}$, соотв. A) *является фундаментальной областью относительно действия группы W в* $\mathfrak{t}$ (соотв. *группы W_a в* $\mathfrak{t}$, соотв. *группы W_a в* $\mathfrak{t}-\mathfrak{t}_r$). *Если $x \in \mathfrak{t}_r$, а элемент $w \in W_a$ таков, что $w(x) = x$, то $w = \mathrm{Id}$.*

г) *Для любой камеры C существует единственный альков A, такой, что $A \subset C$ и $0 \in \bar{A}$. Для любого алькова A существует единственный элемент $\gamma \in N(G, T)$, такой, что $\gamma \in \bar{A}$.*

Если $w \in W$ и $\gamma \in \Gamma(T)$, то $wt_\gamma w^{-1} = t_{w(\gamma)}$ и $wt_\gamma w^{-1}t_\gamma^{-1} = t_{w(\gamma)-\gamma}$ для $w(\gamma)-\gamma \in N(G, T)$; это тут же влечет за собой а). Остальные утверждения предложения следуют из гл. VI, § 1, n° 5, и § 2, nn° 1 и 2.

Следствие 1. *Пусть A — альков алгебры Ли* $\mathfrak{t}$, *а $\bar{A}$ — его замыкание, и пусть H_A— стабилизатор A в W'_a.*

а) *Группа W'_a является полупрямым произведением H_A на W_a.*

б) *Экспоненциальное отображение $\bar{A} \to T$ и каноническое вложение $T \to G$ индуцируют при переходе к факторгруппам и к подмножествам гомеоморфизмы*

$$\bar{A}/H_A \to T/W \to G/\mathrm{Int}(G),$$
$$A/H_A \to T_r/W \to G_r/\mathrm{Int}(G).$$

Пусть $w' \in W'_a$; тогда $w'(A)$ — альков алгебры Ли $\mathfrak{t}$, и существует (предложение 2б)) единственный элемент w из W_a, такой, что $w(A) = w'(A)$, т. е. такой, что $w^{-1}w' \in H_A$. Поскольку подгруппа W_a нормальна в W'_a, получаем а).

Каноническое вложение $\bar{A}$ в $\mathfrak{t}$ индуцирует непрерывную биекцию θ: $\bar{A} \to \mathfrak{t}/W_a$ (предложение 2в)), которая является гомеоморфизмом ввиду компактности $\bar{A}$. Так как подгруппа W_a нормальна в W'_a, группа H_A дей-

ствует каноническим образом в $\mathfrak{t}/W_a$ (*Alg.*, chap. I, p. 55) [1]) и $\mathfrak{t}/W'_a$ отождествляется с факторгруппой $(\mathfrak{t}/W_a)/H_A$. Отображение θ перестановочно с действием группы H_A и, следовательно, индуцирует при переходе к факторгруппам гомеоморфизм $\bar{A}/H_A \to \mathfrak{t}/W'_a$. Таким образом, отображение $\exp_T$ индуцирует гомеоморфизм $\mathfrak{t}/\Gamma(T)$ на T и тем самым гомеоморфизм $\mathfrak{t}/W'_a$ на T/W. Отсюда и из следствия 1 предложения 5 § 2, n° 4, получаем утверждение б).

Замечания. 1) Группа H_A естественным образом отождествляется с $\Gamma(T)/N(G, T)$ и, следовательно, с группой $\pi_1(G)$. Таким образом, если группа G односвязна, H_A состоит лишь из единичного элемента.

2) Пусть $x \in A$; тогда $\exp x \in T_r$, и, следовательно, $Z(\exp x)_0 = T$. Для того чтобы элемент $\exp x$ был *вполне регулярным* (n° 1, замечание), необходимо и достаточно, чтобы $w(x) \neq x$ для любого неединичного элемента $w \in W'_a$. Согласно следствию 1, это значит также, что $h(x) \neq x$ для любого неединичного элемента $h \in H_A$. В частности, если группа G односвязна, то $Z_G(t) = T$ для любого $t \in T_r$, и любой регулярный элемент из G вполне регулярен.

3) Специальными точками для W_a (гл. VI, § 2, n° 2) являются такие элементы x из $\mathfrak{t}$, что $\delta(\alpha)(x) \in 2\pi i\,\mathbf{Z}$ для любого $\alpha \in R(G, T)$ (*там же*, предложение 3), т. е. такие, что $\exp x \in C(G)$ (§ 4, n° 4, предложение 8). Для любого такого элемента x и произвольного элемента $w \in W$ имеем $wx - x \in N(G, T)$ (гл. VI, § 1, n° 9, предложение 27), так что стабилизаторы элемента x в W_a и в W'_a совпадают. Пусть S — множество специальных точек для $\bar{A}$; из сказанного выше и из следствия 1 вытекает, что группа H_A действует в S свободно и что экспоненциальное отображение индуцирует биекцию S/H_A на $C(G)$.

Следствие 2. *Пусть C — камера алгебры Ли $\mathfrak{t}$ и $\bar{C}$ — ее замыкание. Канонические вложения $\bar{C} \to \mathfrak{t} \to \mathfrak{g}$ индуцируют при переходе к факторпространствам гомеоморфизмы*

$$\bar{C} \to \mathfrak{t}/W \to \mathfrak{g}/\mathrm{Ad}(G).$$

Канонические отображения $\bar{C} \to \mathfrak{t}$ и $\mathfrak{t} \to \mathfrak{t}/W$ являются собственными (*Общ. топ.*, 1969, гл. III, § 4, n° 1, предложение 2в)). Отображение $\bar{C} \to \mathfrak{t}/W$ является непрерывным, собственным и биективным (предложение 2в)), а следовательно, гомеоморфизмом, откуда, принимая во внимание следствие предложения 6 из § 2, n° 5, получаем следствие 2.

Замечание 4. Обозначим через $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ множество регулярных элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (гл. VII, § 2, n° 2, определение 2) и положим $\mathfrak{t}_{\mathrm{reg}} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$. Для любого $x \in \mathfrak{t}$

$$\det(X - \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x) = X^{\dim \mathfrak{t}} \prod_{\alpha \in R(G, T)} (X - \delta(\alpha)(x));$$

[1]) См. также *Алг.*, 1962, гл. I, § 7.— *Прим. перев.*

таким образом, множество $\mathfrak{t}_{\mathrm{reg}}$ состоит из таких элементов x из $\mathfrak{t}$, что $\delta(\alpha)(x) \neq 0$ для любого $\alpha \in R(G, T)$, т. е. является объединением камер в $\mathfrak{t}$ (тем самым $\mathfrak{t}_r \subset \mathfrak{t}_{\mathrm{reg}}$). Из этого следует, что $\bar{C} \cap \mathfrak{t}_{\mathrm{reg}} = C$, откуда получаем гомеоморфизмы

$$C \to \mathfrak{t}_{\mathrm{reg}}/W \to \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}/\mathrm{Ad}(G).$$

Следствие 3. *Предположим, что группа Ли G односвязна. Пусть g — регулярный элемент в группе G. Существуют максимальный тор S в G и альков A в $L(S)$, единственным образом определяемые условиями $g \in \exp(A)$ и $0 \in \bar{A}$.*

Можно предположить, что g принадлежит T_r (§ 2, n° 2, теорема 2). Пусть x — элемент из $\mathfrak{t}_r$, такой, что $\exp x = g$, и пусть A' — альков алгебры Ли $\mathfrak{t}$, содержащий x. Альковы A в $\mathfrak{t}$, для которых $g \in \exp(A)$,— это альковы $A' - \gamma$ для $\gamma \in \Gamma(T)$; таким образом, наше утверждение следует из предложения 2г).

3. *Автоморфизмы и регулярные элементы*

Лемма 1. *Пусть u — автоморфизм группы Ли G и H — множество его неподвижных точек.*

а) *H является замкнутой подгруппой в G.*

б) *Если множество H_0 центрально в G, то группа Ли G коммутативна (и, значит, $G = T$).*

Утверждение а) очевидно. Для доказательства утверждения б) можно заменить G на $D(G)$ (§ 1, следствие 1 предложения 4), т. е. предположить, что G полупроста. Тогда если множество H_0 центрально в G, то $L(H) = \{0\}$, так что эндоморфизм $L(u) - \mathrm{Id}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ биективен. Пусть f — эндоморфизм многообразия G, определенный формулой $f(g) = u(g)^{-1}g$ для $g \in G$. Он этален, поскольку, если $g \in G$ и $x \in \mathfrak{g}$, то $T(f)(xg) = u(g)^{-1}(x - L(u)(x))g$; и, значит, касательное отображение к f в точке g биективно. Отсюда вытекает, что образ эндоморфизма f компактен и открыт и, следовательно, ввиду связности G, совпадает с G. Пусть E — разметка группы G (§ 4, n° 10, определение 3) и $u(E)$ — ее образ относительно автоморфизма u. Согласно предложению 19 из § 4, n° 10, существует такой элемент h из G, что $(\mathrm{Int}\, h)(E) = u(E)$. Пусть $g \in G$ — такой элемент, что $h = f(g) = u(g)^{-1}g$; имеем

$$u \circ \mathrm{Int}\, g = (\mathrm{Int}\, u(g)) \circ u = \mathrm{Int}\, g \circ (\mathrm{Int}\, h)^{-1} \circ u,$$

следовательно, разметка $(\mathrm{Int}\, g)(E)$ устойчива относительно u. Если $(\mathrm{Int}\, g)(E) = (T_1, B, (U_\alpha)_{\alpha \in B})$, то $\sum U_\alpha \in L(H)$. Равенство $L(H) = \{0\}$ влечет за собой $B = \varnothing$; следовательно, $G = T_1$ и группа G коммутативна.

Лемма 2. *Пусть x — элемент из T и S — подтор в T. Если связная компонента единицы группы $Z(x) \cap Z(S)$ совпадает с T, то существует такой элемент s из S, что элемент xs регулярен.*

Для любого α из $R(G, T)$ обозначим через S_α подмножество в S, состоящее из таких элементов $s \in S$, что $(xs)^\alpha = 1$. Если в S не существует ни одного элемента s, такого, что xs регулярен, то S является объединением подмногообразий S_α и, следовательно, совпадает с одним из них. Тогда существует такой элемент α из $R(G\ T)$, что $(xs)^\alpha = 1$ для любого $s \in S$; это означает, что $x^\alpha = 1$ и $\alpha | S = 1$, следовательно, $Z(x) \cap Z(S) \supset Z(\operatorname{Ker} \alpha)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Предположим, что G односвязна. Пусть C — камера алгебры Ли $\mathfrak{t}$, а u — такой автоморфизм группы Ли G, что T и C устойчивы относительно действия автоморфизма u. Тогда множество точек в T, неподвижных относительно u, связно.*

Поскольку G односвязна, множество $\Gamma(T)$ порождено узловыми векторами K_α ($\alpha \in R(G, T)$) и, следовательно, допускает в качестве базиса семейство K_α, когда α пробегает базис $B(C)$, определяемый камерой C (гл. VI, § 1, n° 10). Таким образом, осталось доказать, что если φ — автоморфизм тора T, сохраняющий базис в $\Gamma(T)$, то множество неподвижных относительно φ точек связно. Разлагая этот базис в объединение орбит группы, порожденной автоморфизмом φ, мы приходим к случаю, когда $T = \mathbf{U}^n$ и φ — автоморфизм $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_2, \ldots, z_n, z_1)$. В этом случае неподвижными точками автоморфизма φ являются точки $(z, \ldots, z)$, $z \in \mathbf{U}$, образующие связную подгруппу в T.

Предложение 3. *Пусть u — автоморфизм группы Ли G, и пусть x — точка из G, неподвижная относительно u.*

а) *Существует такой элемент a из $\mathfrak{g}$, неподвижный относительно $L(u)$ и $\operatorname{Ad} x$, что элемент $x \exp a$ регулярен.*

б) *Существует регулярный элемент g из G, неподвижный относительно u, который коммутирует с x.*

Пусть H — группа неподвижных точек автоморфизма u, S — максимальный тор в $Z(x) \cap H$ и K — связная компонента единицы группы $Z(S) \cap Z(x)$. Тогда K — связная замкнутая подгруппа в G; с другой стороны, ввиду следствия 5 теоремы 2 из § 2, n° 2, существуют максимальные торы в G, содержащие S и x; следовательно, K — подгруппа максимального ранга, содержащая S и x. Кроме того, K устойчива относительно u, поскольку этим свойством обладают S и x. Обозначим через V множество неподвижных точек в K относительно u. Тогда

$$S \subset V_0 \subset K \cap H \subset Z(S) \cap Z(x) \cap H;$$

следовательно, множество V_0 содержится в централизаторе тора S в $(Z(x) \cap H)_0$. Но группа $(Z(x) \cap H)_0$ совпадает с S (*там же*, следствие 6), откуда в конечном счете получаем $V_0 = S$. Из леммы 1 вытекает, что подгруппа K коммутативна и, таким образом, является максимальным тором

в G (поскольку она связна и имеет максимальный ранг). Она содержит S и x и совпадает со связной компонентой единицы группы $Z(S)\cap Z(x)$; тогда утверждение а) следует из леммы 2. Полагая $g=x\exp a$, получаем утверждение б).

Следствие. *Пусть* $\mathfrak{s}$ — *компактная алгебра Ли и* φ — *ее автоморфизм. В* $\mathfrak{s}$ *существует регулярный элемент, неподвижный относительно* φ.

Заменяя $\mathfrak{s}$ на $\mathscr{D}\mathfrak{s}$, можно предполагать, что $\mathfrak{s}$ полупроста. Пусть S — односвязная компактная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{s}$, и пусть u — такой автоморфизм группы Ли S, что $L(u)=\varphi$. Из предложения 3 вытекает существование такого элемента a из $\mathfrak{s}$, неподвижного относительно φ, что элемент $\exp a$ регулярен в S; в частности, a регулярен в $\mathfrak{s}$ (n° 2, замечание 4).

Теорема 1. *Пусть u — автоморфизм связной компактной группы Ли G.*

а) *Связная компонента единицы группы неподвижных точек автоморфизма u содержит регулярный элемент группы Ли G.*

б) *Существует максимальный тор K в G и камера в $L(K)$, устойчивые относительно u.*

в) *Если G односвязна, то множество неподвижных относительно u точек связно.*

Утверждение а) есть частный случай при $x=e$ предложения 3. Предположим теперь, что G *односвязна*, и докажем утверждения б) и в). Пусть x — элемент из G, неподвижный относительно u, и пусть g — регулярный элемент в G, неподвижный относительно u и коммутирующий с x (предложение 3). Централизатор K элемента g является максимальным тором в G (n° 2, замечание 2), устойчивым относительно u и содержащим x и g. Согласно следствию 3 предложения 2 из n° 2, существует единственный альков A в $L(K)$, такой, что $g\in\exp(A)$ и $0\in\bar{A}$. Поскольку элемент g неподвижен относительно u, альков A, а следовательно, и камера в $L(K)$, содержащая A, неподвижны относительно $L(u)$. Это доказывает б); кроме того, множество точек в K, неподвижных относительно u, связно (лемма 3) и содержит x и e, откуда следует в) (*Общ. топ.*, 1968, гл. I, § 11, n° 1 предложение 2).

Остается доказать утверждение б) в общем случае. Но если $\tilde{D}(G)$ — универсальная накрывающая группы $D(G)$ и $f\colon \tilde{D}(G)\to G$ — канонический морфизм, то существует автоморфизм $\tilde{u}$ группы $\tilde{D}(G)$, такой, что $f\circ\tilde{u}=u\circ f$. Если $\tilde{K}$ — максимальный тор в $\tilde{D}(G)$ и $\tilde{C}$ — камера в $L(\tilde{K})$, устойчивая относительно $\tilde{u}$ (согласно уже доказанному, такая камера существует), то существуют (§ 2, n° 3, замечание 2) единственный максимальный тор K в G и единственная камера C в $L(K)$, такие, что $\tilde{K}=f^{-1}(K)$ и $\tilde{C}=L(f)^{-1}(C)$, откуда сразу получаем, что K и C устойчивы относительно u. Утверждение б) доказано в общем случае.

Следствие 1. *Предположим, что $\pi_1(G)$ есть $\mathbf{Z}$-модуль без кручения.*

а) *Централизатор любого элемента группы Ли G связен.*

б) *Два коммутирующих элемента группы Ли G принадлежат одному максимальному тору.*

Согласно следствию 3 предложения 11 из § 4, n° 6, группа $D(G)$ односвязна. Имеем $G=C(G)_0.D(G)$. Пусть $x\in G$; положим $x=uv$, где $u\in C(G)_0$ и $v\in D(G)$. Тогда $Z(x)=C(G)_0.Z_{D(G)}(v)$. Согласно теореме 1в), группа $Z_{D(G)}(v)$ связна; следовательно, и $Z(x)$ связна, откуда следует а). Согласно следствию 3 теоремы 2 из § 2, n° 2, $Z(x)$ есть объединение максимальных торов в G, содержащих x, откуда получаем утверждение б).

Следствие 2. *Пусть Γ — компактная подгруппа в* $\mathrm{Aut}(G)$, *обладающая следующим свойством:*

(*) *Существуют такие элементы $u_1, \ldots, u_n$ из Γ, что для любого i замыкание Γ_i подгруппы в Γ, порожденной элементами $u_1, \ldots, u_i$, будет нормальной подгруппой, причем $\Gamma_n=\Gamma$.*

Тогда существует максимальный тор в G, устойчивый относительно действия подгруппы Γ.

Проведем доказательство индукцией по размерности группы Ли G. Без ограничения общности можно предполагать, что $u_1\neq \mathrm{Id}$; тогда подгруппа H, состоящая из неподвижных относительно u_1 точек, отлична от G и устойчива относительно действия группы Γ. Кроме того, ввиду компактности группы Γ образ Γ в $\mathrm{Aut}(H_0)$ является факторгруппой группы Γ и, следовательно, также удовлетворяет условию (*). Согласно предположению индукции, существует максимальный тор S в H, устойчивый относительно Γ. Централизатор K тора S в G связен (§ 2, n° 2, следствие 5) и устойчив относительно Γ; это максимальный тор в G, поскольку H_0 содержит регулярный элемент группы G (теорема 1а)), который сопряжен некоторому элементу из S (*там же*, следствие 4).

Следствие 3. *Пусть H — группа Ли и Γ — компактная подгруппа в H. Предположим, что группа H_0 компактна, а подгруппа Γ удовлетворяет условию* (*) *из следствия 2. Тогда существует такой максимальный тор T в H_0, что* $\Gamma\subset N_H(T)$.

Следствие 4. *Любая нильпотентная подгруппа в компактной группе Ли содержится в нормализаторе некоторого максимального тора.*

Пусть H — компактная группа Ли, а N — нильпотентная подгруппа в H. Тогда замыкание Γ подгруппы N также является нильпотентной группой (гл. III, § 9, n° 1, следствие 2 предложения 1), и достаточно доказать (следствие 3), что Γ удовлетворяет условию (*). Но Γ_0 — нильпотентная связная компактная группа Ли; следовательно, она является тором (§ 1, n° 4, следствие 1 предложения 4), и существует элемент u_1 из Γ_0, порождающий подгруппу, плотную в Γ_0 (*Top. gen.*, chap. VII, p. 8). Конечная группа Γ/Γ_0 нильпотентна, и существуют элементы $\tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_n\in\Gamma/\Gamma_0$, порождающие Γ/Γ_0 и такие, что подгруппа в Γ/Γ_0, порожденная элемента-

ми $(\tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_r)$, нормальна при $r=2, \ldots, n$ (*Alg.*, chap. I, p. 73, th 1, p. 76, th. 4). Тогда если элементы $u_2, \ldots, u_n$ являются представителями элементов $\tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_n$ в Γ, то последовательность $(u_1, \ldots, u_n)$ обладает требуемым свойством.

Пример. Положим $G = \mathbf{U}(n, \mathbf{C})$. В дальнейшем мы покажем, что подгруппа диагональных матриц в G является максимальным тором в G, а ее нормализатор совпадает с множеством *мономиальных* матриц (*Алг.*, 1962, гл. II, § 6, n° 5) в группе Ли G.

Отсюда получаем, что если Φ — невырожденная положительная эрмитова форма на конечномерном комплексном векторном пространстве V и Γ — нильпотентная подгруппа в $\mathbf{U}(\Phi)$, то существует базис в пространстве V, в котором матрицы элементов группы Γ мономиальны (*теорема Блихтфельдта*).

4. Отображения $(G/T)\times T \to G$ и $(G/T)\times A \to G_r$

Отображение $(g, t) \mapsto gtg^{-1}$ из $G\times T$ в G индуцирует при факторизации морфизм аналитических многообразий

$$f\colon (G/T)\times T \to G,$$

который сюръективен (§ 2, n° 2, теорема 2). При ограничении f индуцирует сюръективный морфизм

$$f_r\colon (G/T)\times T_r \to G_r.$$

Взяв его композицию с $\mathrm{Id}_{G/T}\times \exp_T$, получим также сюръективные морфизмы

$$\varphi\colon (G/T)\times \mathfrak{t} \to G,$$

$$\varphi_r\colon (G/T)\times \mathfrak{t}_r \to G_r;$$

наконец, если A — альков в $\mathfrak{t}$, то φ_r индуцирует сюръективный морфизм

$$\varphi_A\colon (G/T)\times A \to G_r.$$

Определим *правое действие* группы W в G/T следующим образом. Пусть $w\in W$ и $u\in G/T$. Обозначим через n представитель элемента w в $N_G(T)$ и через g представитель элемента u в G. Тогда образ элемента gn в G/T не зависит от выбора n и g; обозначим его через $u.w$.

Относительно этого действия группа W действует в G/T *свободно*: в введенных обозначениях предположим, что $u.w = u$; тогда $gn\in gT$ и, следовательно, $n\in T$ и $w=1$.

Определим правое действие группы W в $(G/T)\times T$ по формуле

$$(u, t).w = (u.w, w^{-1}(t)), \quad u\in G/T, \ t\in T, \ w\in W,$$

и правое действие группы W'_a в $(G/T)\times \mathfrak{t}$ по формуле

$$(u, x).\omega = (u.\bar{\omega}, \omega^{-1}(x)), \quad u\in G/T, \ x\in \mathfrak{t}, \ \omega\in W'_a,$$

где $\bar{\omega}$ — образ элемента ω в факторгруппе $W'_a/\Gamma(T) = W$.

Если A — альков в $\mathfrak{t}$ и H_A — подгруппа в W'_a, сохраняющая A, то при помощи ограничения получаем действие группы H_A на $(G/T)\times A$.

Эти различные действия согласуются с морфизмами f, φ и φ_A: для $u\in G/T$, $t\in T$, $x\in\mathfrak{t}$, $y\in A$, $w\in W$, $\omega\in W'_a$, $h\in H_A$

$$f((u, t).w)=f(u, t),\ \ \varphi((u, x).\omega)=\varphi(u, x),\ \ \varphi_A((u, y).h)=\varphi_A(u, y).$$

Лемма 4. *Пусть* $g\in G$, $t\in T$, *и пусть* $\bar g$ — *образ элемента* g *в* G/T. *Отождествим касательное пространство к* G/T (соотв. T, соотв. G) *в точке* $\bar g$ (соотв. t, соотв. gtg^{-1}) *с* $\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$ (соотв. $\mathfrak{t}$, соотв. $\mathfrak{g}$) *при помощи левого сдвига* $\gamma(g)$ *на элемент* g (соотв. t, соотв. gtg^{-1}). *Тогда линейное отображение, касательное к* f *в точке* $(\bar g, t)$, *отождествляется с отображением* $f'\colon (\mathfrak{g}/\mathfrak{t})\times\mathfrak{t}\to\mathfrak{g}$, *определяемым следующим образом: если* $z\in\mathfrak{g}$, $x\in\mathfrak{t}$ *и если* $\bar z$ *обозначает образ в* $\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$ *элемента* z, *то*

$$f'(\bar z, x)=(\mathrm{Ad}\, gt^{-1})(z-(\mathrm{Ad}\, t)z+x).$$

Пусть F — такое отображение из $G\times T$ в T, что $F(g, t)=gtg^{-1}$. Поскольку $F\circ(\gamma(g), \mathrm{Id}_T)=\mathrm{Int}\, g\circ F$, то

$$T_{(g,t)}(F)(gz, tx)=T_t(\mathrm{Int}\, g)\circ T_{(e,t)}(F)(z, tx).$$

Согласно предложению 46 из гл. III, § 3, n° 12,

$$T_{(e,t)}(F)(z, tx)=t((\mathrm{Ad}\, t^{-1})z-z)+tx=t((\mathrm{Ad}\, t^{-1})(z-(\mathrm{Ad}\, t)z+x)),$$

и в качестве следствия получаем

$$T_{(g,t)}(F)(gz, tx)=gtg^{-1}((\mathrm{Ad}\, gt^{-1})(z-(\mathrm{Ad}\, t)z+x)).$$

Доказательство леммы вытекает из этой формулы при переходе к фактор-группам.

Предложение 4. а) *Пусть* $g\in G$, $t\in T$, $x\in\mathfrak{t}$, *и пусть* $\bar g$ — *образ элемента* g *в* G/T. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) $t\in T_r$ (соотв. $x\in\mathfrak{t}_r$).

(i bis) *Элемент* $f(\bar g, t)$ (соотв. $\varphi(\bar g, x)$) *регулярен в* G.

(ii) *Отображение* f *(соотв.* φ*) является субмерсией в точке* $(\bar g, t)$ (соотв. $(\bar g, x)$).

(ii bis) *Отображение* f (соотв. φ) *этально в точке* $(\bar g, t)$ (соотв. $(\bar g, x)$).

б) *Отображение* f_r (соотв. φ_r, соотв. φ_A) *превращает* $(G/T)\times T_r$ (соотв. $(G/T)\times\mathfrak{t}_r$, соотв. $(G/T)\times A$) *в главное накрытие множества* G_r *с группой* W (соотв. W'_a, соотв. H_A).

а) Эквивалентность (i) и (i bis) очевидна. Эквивалентность (ii) и (ii bis) следует из соотношений $\dim((G/T)\times T)=\dim((G/T)\times\mathfrak{t})=\dim(G)$. Согласно лемме 4, отображение f является субмерсией в точке $(\bar g, t)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}=\mathfrak{t}+\mathrm{Im}\,(\mathrm{Ad}\, t-\mathrm{Id})$; это означает, что элемент t регулярен. Наконец, поскольку $\varphi=f\circ(\mathrm{Id}_{G/T}\times\exp_T)$, то отображение φ этально в точке $(\bar g, x)$ тогда и только тогда, когда отображение f этально в точке $(\bar g, \exp x)$; это, согласно предыдущим рассуждениям, означает, что x принадлежит $\mathfrak{t}_r$.

б) Таким образом, морфизмы f_r, φ_r, φ_A этальны. С другой стороны, группа W действует свободно на G/T и a fortiori на $(G/T)\times T$. Пусть для g, g' из G и t, t' из T_r выполняется $f(\bar{g}, t)=f(\bar{g}', t')$; тогда $\operatorname{Int} g^{-1}g'$ переводит t' в t и, следовательно, нормализует T, поскольку $T=Z(t)_0=Z(t')_0$, а класс w элемента $g^{-1}g'$ в W переводит $(\bar{g}, t)$ в $(\bar{g}', t')$. Отсюда следует, что f_r — главное накрытие с группой W; это в свою очередь означает, что φ_r — главное накрытие с группой W'_a, и при помощи ограничения на связную компоненту $(G/T)\times A$ множества $(G/T)\times \mathfrak{t}_r$ получаем, что φ_A — главное накрытие с группой H_A.

Замечания. 1) Согласно предложению 3 из § 2, n° 4, многообразие $(G/T)\times A$ односвязно. Отсюда следует, что φ_A — универсальное накрытие группы G_r. Поскольку группа $\pi_1(G_r)$ канонически изоморфна $\pi_1(G)$ (n° 1, предложение 1, и *Top. gen.*, chap. XI), то группа $\pi_1(G)$ отождествляется с H_A (т. е. с $\Gamma(T)/N(G, T)$).

2) Ограничение отображения φ_A на $W\times A\subset (G/T)\times A$ превращает $W\times A$ в главное накрытие множества T_r с группой H_A. Таким образом, мы вновь получаем следствие 1 предложения 2 из n° 2.

3) Обозначим через $\mathfrak{g}_r$ прообраз множества G_r при экспоненциальном отображении, и пусть $\varepsilon\colon \mathfrak{g}_r \to G_r$ — отображение, полученное из $\exp_G$. Отображение $(g, x)\mapsto (\operatorname{Ad} g)\ (x)$ из $G\times \mathfrak{t}_r$ в $\mathfrak{g}_r$ определяет при факторизации отображение $\psi_r\colon (G/T)\times \mathfrak{t}_r \to \mathfrak{g}_r$. Имеем $\varepsilon\circ\psi_r=\varphi_r$. Пусть $w\in W$, $\gamma\in\Gamma(T)$ и $\omega\in W'_a$ таковы, что $\omega(z)=w(z)+\gamma$ для любого $z\in\mathfrak{t}$; имеем $\psi_r((\bar{g}, x)\,\omega)=\psi_r(\bar{g}, x)-(\operatorname{Ad} g)\ (\gamma)$, где $g\in G$, $x\in\mathfrak{t}_r$, так что $\psi_r((\bar{g}, x)\,\omega)=\psi_r(\bar{g}, x)$ тогда и только тогда, когда $\gamma=0$. Отсюда следует (см. *Top. den.*, chap. XI), что ψ_r — главное накрытие над $\mathfrak{g}_r$ с группой W, а $\varepsilon\colon \mathfrak{g}_r\to G_r$ — накрытие, ассоциированное с главным накрытием φ_r, со слоем, изоморфным W'_a-множеству W'_a/W.

§ 6. Интегрирование в компактных группах Ли

В этом параграфе сохраняются обозначения из § 4; *положим* $w(G)=\operatorname{Card}(W_G(T))$. *Обозначим через* dg (соотв. dt) *меру Хаара на группе Ли* G (соотв. T) *с полной массой* 1, *а через* n (соотв. r) — *размерность группы Ли* G (соотв. T).

1. Произведение знакопеременных полилинейных форм

Пусть A — коммутативное кольцо и M — некоторый A-модуль. Для каждого целого числа $r\geqslant 0$ через $\operatorname{Alt}^r(M)$ обозначим A-модуль знакопеременных r-линейных форм на M. Этот модуль отождествляется с сопряженным к A-модулю $\bigwedge^r(M)$ (*Alg.*, chap. III, p. 80, prop. 7). Пусть $u\in\operatorname{Alt}^s(M)$ и $v\in\operatorname{Alt}^r(M)$; напомним (*Alg.*, chap. III, p. 142, ex. 3), что внешним произведением u и v называется элемент $u\wedge v$ из $\operatorname{Alt}^{s+r}(M)$, определяемый формулой

$$(u \wedge v)(x_1, \ldots, x_{s+r}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{s,r}} \varepsilon_\sigma u(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(s)}) v(x_{\sigma(s+1)}, \ldots, x_{\sigma(s+r)}),$$

где $\mathfrak{S}_{s,r}$ — подмножество в симметрической группе $\mathfrak{S}_{s+r}$, состоящее из перестановок, ограничения которых на $[1, s]$ и на $[s+1, s+r]$ являются монотонно возрастающими.

Пусть теперь

$$0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \to 0$$

— точная последовательность свободных A-модулей рангов r, $r+s$ и s соответственно.

Лемма 1. *Существует A-билинейное отображение из* $\mathrm{Alt}^s(M'') \times \mathrm{Alt}^r(M')$ *в* $\mathrm{Alt}^{s+r}(M)$, *которое обозначается через* $(u, v) \mapsto u \frown v$ *и характеризуется каждым из двух следующих свойств:*

а) *Обозначим через* $u_1 \in \mathrm{Alt}^s(M)$ *форму* $(x_1, \ldots, x_s) \mapsto u(p(x_1), \ldots, p(x_s))$, *и пусть* $v_1 \in \mathrm{Alt}^r(M)$ — *такая форма, что* $v_1(i(x'_1), \ldots, i(x'_r)) = v(x'_1, \ldots, x'_r)$ *для* $x'_1, \ldots, x'_r$ *из* M'. *Тогда* $u \frown v = u_1 \wedge v_1$.

б) *Пусть* $x_1, \ldots, x_s$ *принадлежат* M, *а* $x'_1, \ldots, x'_r$ *принадлежат* M'; *тогда*

$$(u \frown v)(x_1, \ldots, x_s, i(x'_1), \ldots, i(x'_r)) = u(p(x_1), \ldots, p(x_s)) v(x'_1, \ldots, x'_r). \qquad (1)$$

Отображение $\varphi\colon \mathrm{Alt}^s(M'') \otimes_A \mathrm{Alt}^r(M') \to \mathrm{Alt}^{s+r}(M)$, *такое, что* $\varphi(u \otimes v) = u \frown v$, *есть изоморфизм свободных A-модулей ранга один.*

Существование формы v_1, удовлетворяющей условию а), следует из того, что $\bigwedge^r(i)$ порождает изоморфизм $\bigwedge^r(M')$ на подмодуль, выделяющийся прямым слагаемым в $\bigwedge^r(M)$ (*Alg.*, chap. III, p. 78). Пусть v_1 — такая форма; положим $u \frown v = u_1 \wedge v_1$. Тогда равенство (1) выполняется, поскольку если положить $i(x'_k) = x_{s+k}$ для $1 \leqslant k \leqslant r$, то единственным элементом σ из $\mathfrak{S}_{s,r}$, таким, что $p(x_{\sigma(i)}) \neq 0$ для $1 \leqslant i \leqslant s$, будет тождественная перестановка. С другой стороны, формула (1) определяет $u \frown v$ единственным образом: действительно, пусть $(e'_1, \ldots, e'_r)$ — базис в M', $(f''_1, \ldots, f''_s)$ — базис в M'' и $f_1, \ldots, f_s$ — такие элементы из M, что $p(f_i) = f''_i$ для $1 \leqslant i \leqslant s$. Тогда $(f_1, \ldots, f_s, i(e'_1), \ldots, i(e'_r))$ — базис в M (*Alg.*, chap. II, p. 27, prop. 21) и формула (1) записывается в виде

$$(u \frown v)(f_1, \ldots, f_s, i(e'_1), \ldots, i(e'_r)) = u(f''_1, \ldots, f''_s) v(e'_1, \ldots, e'_r), \qquad (2)$$

т. е. элемент из $\mathrm{Alt}^{s+r}(M)$ определяется своим значением на некотором базисе.

Из предыдущих рассуждений получаем, что каждое из условий а) и б) определяет единственным образом произведение $u \frown v$. Очевидно, что это произведение билинейно. И наконец, последнее утверждение леммы следует из формулы (2).

2. Формула интегрирования Г. Вейля

Пусть e — единичный элемент в группе Ли G и $\bar{e}$ — класс элемента e в G/T. Отождествим касательное пространство к G в точке e с $\mathfrak{g}$, касательное пространство к T в e с $\mathfrak{t}$ и касательное пространство к G/T в $\bar{e}$ с $\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$. Обозначим через $(u, v) \mapsto u \frown v$ $\mathbf{R}$-билинейное отображение

$$\mathrm{Alt}^{n-r}(\mathfrak{g}/\mathfrak{t}) \times \mathrm{Alt}^{r}(\mathfrak{t}) \to \mathrm{Alt}^{n}(\mathfrak{g}),$$

определенное в n° 1.

Напомним (гл. III, § 3, n° 13, предложение 50), что отображение $\omega \mapsto \omega(e)$ осуществляет изоморфизм векторного пространства левоинвариантных дифференциальных форм степени n (соотв. r) на G (соотв. T) на пространство $\mathrm{Alt}^n(\mathfrak{g})$ (соотв. $\mathrm{Alt}^r(\mathfrak{t})$). Заметим также, что $\det \mathrm{Ad}\, g = 1$ для любого $g \in G$ ввиду того, что любая связная компактная подгруппа в $\mathbf{R}^*$ состоит лишь из единичного элемента. Тем самым левоинвариантные дифференциальные формы степени n на G являются также правоинвариантными и инвариантными относительно внутренних автоморфизмов (гл. III, § 3, n° 16, следствие предложения 54); в дальнейшем мы будем говорить просто об инвариантных дифференциальных формах на G.

Кроме того, из предложения 56 гл. III, § 3, n° 16, и из предыдущих рассуждений вытекает, что отображение $\omega \mapsto \omega(\bar{e})$ осуществляет изоморфизм пространства G-инвариантных дифференциальных форм степени $n-r$ на G/T на пространство $\mathrm{Alt}^{n-r}(\mathfrak{g}/\mathfrak{t})$.

Если $\omega_{G/T}$ есть G-инвариантная дифференциальная форма степени $n-r$ на G/T и ω_T — инвариантная дифференциальная форма степени r на T, то через $\omega_{G/T} \frown \omega_T$ обозначим единственную инвариантную дифференциальную форму степени n на G, такую, что

$$(\omega_{G/T} \frown \omega_T)(e) = \omega_{G/T}(\bar{e}) \frown \omega_T(e).$$

Наконец, напомним, что через $f\colon (G/T) \times T \to G$ обозначается морфизм многообразий, полученный при факторизации из отображения $(g, t) \mapsto gtg^{-1}$ из $G \times T$ в G (§ 5, n° 4). Если α и β — дифференциальные формы на G/T и T соответственно, то через $\alpha \wedge \beta$ обозначим форму $\mathrm{pr}_1^* \alpha \wedge \wedge \mathrm{pr}_2^* \beta$ на $(G/T) \times T$.

Для $t \in T$ обозначим через $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{t}}(t)$ эндоморфизм пространства $\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$, полученный из $\mathrm{Ad}\, t$ при факторизации. Положим

$$\delta_G(t) = \det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{t}}(t) - 1) = \prod_{\alpha \in R(G, T)} (t^\alpha - 1). \qquad (3)$$

Пусть $x \in \mathfrak{t}$ и $\alpha \in R(G, T)$; обозначим через $\hat{\alpha}$ элемент $(2\pi i)^{-1}\delta(\alpha)$ из $\mathfrak{t}^*$, так что

$$((\exp x)^\alpha - 1)((\exp x)^{-\alpha} - 1) = (e^{2\pi i \hat{\alpha}(x)} - 1)(e^{-2\pi i \hat{\alpha}(x)} - 1) = 4\sin^2 \pi \hat{\alpha}(x).$$

Если через $R_+(G, T)$ обозначить множество положительных корней системы $R(G, T)$ относительно базиса B, то

$$\delta_G(\exp x) = \prod_{\alpha \in R_+(G, T)} 4 \sin^2 \pi \hat{\alpha}(x),$$

откуда, в частности, следует, что $\delta_G(t) > 0$ для любого $t \in T_r$. Заметим также, что $\delta_G(t) = \delta_G(t^{-1})$ для $t \in T$.

Предложение 1. *Пусть ω_G, $\omega_{G/T}$ и ω_T — инвариантные дифференциальные формы на G, G/T и T соответственно степеней n, $n-r$ и r. Если* $\omega_G = \omega_{G/T} \frown \omega_T$, то

$$f^*(\omega_G) = \omega_{G/T} \wedge \delta_G \omega_T.$$

Очевидно, можно считать формы $\omega_{G/T}$ и ω_T ненулевыми; тогда дифференциальная форма $(u, t) \mapsto \omega_{G/T}(u) \wedge \omega_T(t)$ степени n на $(G/T) \times T$ всюду ненулевая. Следовательно, существует такая числовая функция δ на $(G/T) \times T$, что

$$f^*(\omega_G)(u, t) = \delta(u, t)\, \omega_{G/T}(u) \wedge \omega_T(t).$$

Теперь заметим, что для $h \in G$, $u \in G/T$, $t \in T$ имеем $f(h.u, t) = (\operatorname{Int} h) f(u, t)$. Из инвариантности формы ω_G относительно внутренних автоморфизмов получаем, что $\delta(hu, t) = \delta(u, t)$ и, следовательно, $\delta(u, t) = \delta(\bar{e}, t)$.

Обозначим через $p: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{t}$ отображение перехода к факторалгебре, а через $\varphi: \mathfrak{g}/\mathfrak{t} \to \mathfrak{g}$ — отображение, определяемое формулой

$$\varphi(p(X)) = (\operatorname{Ad} t^{-1}) X - X \text{ для } X \in \mathfrak{g};$$

напомним (§ 5, n° 4, лемма 4), что касательное отображение

$$T_{(e, t)}(f): T_e(G/T) \times T_t(T) \to T_t(G)$$

переводит (z, tH) в $t(\varphi(z) + H)$ для $z \in \mathfrak{g}/\mathfrak{t}$, $H \in \mathfrak{t}$.

Пусть $z_1, \ldots, z_{n-r}$ — элементы из $\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$ и $H_1, \ldots, H_r$ — элементы из $\mathfrak{t}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&f^* \omega_G(\bar{e}, T)(z_1, \ldots, z_{n-r}, tH_1, \ldots, tH_r) = \\
&\quad = \omega_G(t)(t\varphi(z_1), \ldots, t\varphi(z_{n-r}), tH_1, \ldots, tH_r) \text{ (согласно определению)} = \\
&\quad = \omega_G(e)(\varphi(z_1), \ldots, \varphi(z_{n-r}), H_1, \ldots, H_r) \text{ (поскольку } \omega_G \text{ инвариантна)} = \\
&\quad = \omega_{G/T}(\bar{e})(p\varphi(z_1), \ldots, p\varphi(z_{n-r})).\omega_T(e)(H_1, \ldots, H_r) \text{ (n° 1, лемма 1)} = \\
&\quad = \det(p\varphi)\, \omega_{G/T}(\bar{e})(z_1, \ldots, z_{n-r}).\omega_T(e)(H_1, \ldots, H_r) = \\
&\quad = \delta_G(t)\, \omega_{G/T}(\bar{e})(z_1, \ldots, z_{n-r}).\omega_T(t)(t H_1, \ldots, t H_r) \text{ (поскольку } \omega_T \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{инвариантна)} = \\
&\quad = \delta_G(t)(\omega_{G/T} \wedge \omega_T)(\bar{e}, t)(z_1, \ldots, z_{n-r}, tH_1, \ldots, tH_r),
\end{aligned}$$

откуда $f^*\omega_G(\bar{e}, t) = \delta_G(t)(\omega_{G/T} \wedge \omega_T)(\bar{e}, t)$ и, следовательно, $\delta(\bar{e}, t) = \delta_G(t)$. Предложение доказано.

Снабдим многообразия G, T и G/T ориентациями, определяемыми формами ω_G, ω_T и $\omega_{G/T}$ соответственно. Тогда эти формы определяют инвариантные меры на G, T и G/T (гл. III, § 3, n° 16, предложения 55 и 56), также обозначаемые через ω_G, ω_T и $\omega_{G/T}$.

Лемма 2. *Если* $\omega_G = \omega_{G/T} \frown \omega_T$, *то*

$$\int_G \omega_G = \int_{G/T} \omega_{G/T} \cdot \int_T \omega_T.$$

Обозначим через π канонический морфизм G в G/T. Пусть $g \in G$, и пусть $t_1, \ldots, t_{n-r}$ — элементы из $T_{\pi(g)}(G/T)$. Отождествим слой $\pi^{-1}(\pi(g)) = gT$ с T при помощи сдвига $\gamma(g)$. Тогда соотношение $\omega_G = \omega_{G/T} \frown \omega_T$ влечет за собой равенство (*Мн., Св., рез.*, 11.4.5)

$$\omega_G \llcorner (t_1, \ldots, t_{n-r}) = (\omega_{G/T}(t_1, \ldots, t_{n-r}))\,\omega_T.$$

Тогда $\int_\pi \omega_G = \left(\int_T \omega_T\right) \omega_{G/T}$ (*Мн., Св. рез.*, 11.4.6) и

$$\int_G \omega_G = \int_{G/T} \int_\pi \omega_G = \int_T \omega_T \cdot \int_{G/T} \omega_{G/T} \quad (\textit{Мн., Св. рез.}, 11.4.8).$$

Лемма 3. *Прообраз на* $(G/T) \times T_r$ *при локальном гомеоморфизме* f_r (*Интегр.*, гл. V, § 6, n° 6) *меры* dg *на* G_r *есть мера* $\mu \otimes \delta_G\, dt$, *где* μ — *единственная* G-*инвариантная мера на* G/T *с полной массой 1.*

Выберем инвариантную дифференциальную форму ω_T (соотв. $\omega_{G/T}$) на T (соотв. G/T) максимальной степени так, чтобы мера, определяемая формой ω_T (соотв. $\omega_{G/T}$), была равна dt (соотв. μ). Положим $\omega_G = \omega_{G/T} \frown \omega_T$. Из леммы 2 вытекает, что мера, определяемая формой ω_G, равна dg. Пусть U — такое открытое подмножество в $(G/T) \times T_r$, что гомеоморфизм f_r индуцирует изоморфизм подмножества U на открытое подмножество V в G_r. Пусть φ — непрерывная функция с компактным носителем, содержащимся в V. Обозначим по-прежнему через φ продолжение φ на G_r, обращающееся в нуль вне множества V. Имеем

$$\begin{aligned}\int_V \varphi\, dg &= \int_V \varphi\, \omega_G = \int_U (\varphi \circ f_r)\, f_r^*(\omega_G) = \\ &= \int_U (\varphi \circ f_r)\, \omega_{G/T} \wedge \delta_G\, \omega_T \quad (\text{предложение } 1) = \\ &= \int_U (\varphi \circ f_r)\, d\mu \,.\, \delta_G\, dt.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 1 (Г. Вейль). *Мера dg на G есть образ при отображении $(g, t) \mapsto gtg^{-1}$ из $G \times T$ в G меры $dg \otimes \frac{1}{w(G)} \delta_G \, dt$, где*

$$\delta_G(t) = \det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{t}}(t) - 1) = \prod_{\alpha \in R(G, T)} (t^\alpha - 1).$$

Другими словами (*Интегр.*, гл. V, § 6, n° 3, предложение 4), *мера dg есть образ при отображении $f: (G/T) \times T \to G$ меры $\mu \otimes \frac{1}{w(G)} \delta_G \, dt$.*

Докажем последнее утверждение. Из § 5, n° 1, и из *Мн., Св. рез.*, 10.1.3в), следует, что множество $G - G_r$ нигде не плотно в G, а множество $T - T_r$ нигде не плотно в T. Кроме того, отображение f_r превращает $(G/T) \times T_r$ в главное накрытие множества G_r с группой W (§ 5, n° 4, предложение 4б)). Теперь доказательство теоремы следует из леммы 3 и из *Интегр.*, гл. V, § 6, n° 6, предложение 11.

Следствие 1. (i) *Пусть φ — функция, интегрируемая на G, со значениями в банаховом пространстве или в $\overline{\mathbf{R}}$. Для почти всех $t \in T$ функция $g \mapsto \varphi(gtg^{-1})$ на G интегрируема по мере dg. Функция $t \mapsto \delta_G(t) \int_G \varphi(gtg^{-1}) \, dg$ интегрируема на T и*

$$\int_G \varphi(g) \, dg = \frac{1}{w(G)} \int_T \left(\int_G \varphi(gtg^{-1}) dg \right) \delta_G(t) \, dt \tag{4}$$

(«формула интегрирования Германа Вейля»).

(ii) *Пусть φ — положительная измеримая функция на G. Для почти всех $t \in T$ функция $g \to \varphi(gtg^{-1})$ на G измерима. Функция $t \mapsto \int_G^* \varphi(gtg^{-1}) \, dg$ на T измерима и*

$$\int_G^* \varphi(g) \, dg = \frac{1}{w(G)} \int_T^* \left(\int_G^* \varphi(gtg^{-1}) \, dg \right) \delta_G(t) \, dt. \tag{5}$$

Поскольку отображение f получается из отображения $(g, t) \mapsto gtg^{-1}$ из $G \times T$ в G при факторизации, то остается применить *Интегр.*, гл. V, § 5, 6, 8, и *Интегр.*, гл. VII, § 2.

Следствие 2. *Пусть φ — центральная* (т. е. такая, что $\varphi(gh) = \varphi(hg)$ для любых элементов g и h из G) *функция на G со значениями в некотором банаховом пространстве или в $\overline{\mathbf{R}}$.*

а) *Для того чтобы φ была измерима, необходимо и достаточно, чтобы ее ограничение на T было измеримо.*

б) *Для того чтобы φ была интегрируема, необходимо и достаточно чтобы функция $(\varphi | T)\delta_G$ была интегрируема на T, и тогда*

$$\int_G \varphi(g) \, dg = \frac{1}{w(G)} \int_T \varphi(t) \, \delta_G(t) \, dt. \tag{6}$$

Обозначим через $p\colon G/T\times T\to T$ проекцию на второй сомножитель. Тогда $\varphi\circ f=(\varphi\,|\,T)\circ p$; кроме того, образ меры $\mu\otimes\frac{1}{w(G)}\delta_G\,dt$ при отображении p есть мера $\frac{1}{w(G)}\delta_G\,dt$. Теперь следствие вытекает из теоремы 1 этого пункта и из теоремы 1 из *Интегр.*, гл. V, § 6, n° 2, примененных к двум собственным отображениям f и p.

Следствие 3. *Пусть H — связная замкнутая подгруппа в G, содержащая T, и пусть $\mathfrak{h}$ — ее алгебра Ли, а dh — мера Хаара на H с полной массой 1. Пусть φ — интегрируемая центральная функция на G со значениями в некотором банаховом пространстве или в $\bar{\mathbf{R}}$. Тогда функция* $h\mapsto\varphi(h)\det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)-1)$ *центральна и интегрируема на H и*

$$\int_G\varphi(g)\,dg=\frac{w(H)}{w(G)}\int_H\varphi(h)\det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)-1)\,dh. \tag{7}$$

Действительно, функция $h\mapsto\varphi(h)\det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)-1)$ — центральная функция на H, ограничение которой на T имеет вид $t\mapsto\varphi(t)\,\delta_G(t)\,\delta_H(t)^{-1}$. Теперь следствие вытекает из следствия 2, примененного к группам G и H.

Замечания. 1) Если в следствии 3 положить $\varphi=1$, то получим формулу

$$\int_H\det(Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)-1)\,dh=w(G)/w(H) \tag{8}$$

и, в частности,

$$\int_T\delta_G(t)\,dt=w(G). \tag{9}$$

2) Пусть ν — мера на факторпространстве T/W, определяемая формулой

$$\int_{T/W}\psi(\tau)\,d\nu(\tau)=\frac{1}{w(G)}\int_T\psi(\pi(t))\,\delta_G(t)\,dt,$$

где через π обозначается каноническая проекция T на T/W. Из следствия 2 вытекает, что гомеоморфизм $T/W\to G/\mathrm{Int}(G)$ (§ 2, n° 5, следствие 1 предложения 5) переводит меру ν в образ меры dg при канонической проекции $G\to G/\mathrm{Int}(G)$.

3) Предположим, что группа G односвязна. Пусть A — альков в $\mathfrak{t}$ и dx — мера Хаара на $\mathfrak{t}$, такая, что $\int_A dx=1$. Тогда мера ν является также образом при гомеоморфизме $\bar{A}\to T/W$ (§ 5, n° 2, следствие 1 предложения 2) меры $\frac{1}{w(G)}\prod_{\alpha\in R_+(G,T)}4\sin^2\pi\,\hat{\alpha}(x)\,dx$ на $\bar{A}$.

Пример. Возьмем в качестве G группу $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$, а в качестве T — подгруппу диагональных матриц (§ 3, n° 6); отождествим $\mathfrak{t}$ с $\mathbf{R}$ при помощи выбора базиса $\{iH\}$ в $\mathfrak{t}$ (*там же*). Положим $A =]0, \pi[$; это альков в $\mathfrak{t}$. Отрезок $\bar{A} = [0, \pi]$ отождествляется с пространством классов сопряженных элементов в группе Ли G, причем элемент θ из $\bar{A}$ соответствует классу элементов, сопряженных элементу $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$. Пусть $d\theta$ — мера Лебега $[0, \pi]$; из предыдущих рассуждений получаем, что мера на $\bar{A}$, образ меры Хаара на группе Ли G, совпадает с $\frac{2}{\pi} \sin^2 \theta \, d\theta$.

3. Интегрирование в алгебрах Ли

Предложение 2. *Пусть H —* (вещественная) *группа Ли размерности m и $\mathfrak{h}$ — ее алгебра Ли. Пусть ω_H — правоинвариантная дифференциальная форма степени m на H, и пусть $\omega_{\mathfrak{h}}$ — дифференциальная форма степени m на $\mathfrak{h}$, инвариантная относительно сдвигов и совпадающая в начале координат с $\omega_H(e)$. Тогда*

$$(\exp_H)^* \omega_H = \lambda_{\mathfrak{h}} \omega_{\mathfrak{h}}, \tag{10}$$

где $\lambda_{\mathfrak{h}}$ — функция на $\mathfrak{h}$, инвариантная относительно действия $\mathrm{Ad}(H)$ *и такая, что*

$$\lambda_{\mathfrak{h}}(x) = \det\left(\sum_{p \geqslant 0} \frac{1}{(p+1)!} (\mathrm{ad}\, x)^p \right) \quad \textit{для } x \in \mathfrak{h}.$$

Пусть $x, x_1, \ldots, x_m$ — элементы из $\mathfrak{h}$. Имеем

$$(\exp^* \omega_H)_x (x_1, \ldots, x_m) = (\omega_H(\exp x)) (T_x(\exp)(x_1), \ldots, T_x(\exp)(x_m)).$$

Обозначим через $\varpi(x): \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ левый дифференциал экспоненциального отображения в точке x (гл. III, § 3, n° 17, определение 8); согласно определению,

$$T_x(\exp)(y)(\exp x)^{-1} = \varpi(x).y \text{ для любого } y \in \mathfrak{h}.$$

Ввиду того что форма ω_H левоинвариантна, получаем

$$(\omega_H(\exp x))(T_x(\exp)(x_1), \ldots, T_x(\exp)(x_m)) = \omega_H(e)(\varpi(x).x_1, \ldots, \varpi(x).x_m) =$$
$$= (\det \varpi(x))\, \omega_{\mathfrak{h}}(x_1, \ldots, x_m),$$

и, следовательно, $\exp^* \omega_H = \lambda_{\mathfrak{h}} \omega_{\mathfrak{h}}$ для

$$\lambda_{\mathfrak{h}}(x) = \det \varpi(x) = \det \frac{\exp \mathrm{ad}\, x - 1}{\mathrm{ad}\, x}$$

(гл. III, § 6, n° 4, предложение 12).

Пусть $h \in H$; поскольку $\mathrm{Ad}\, h$ — автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{h}$,

$$\operatorname{ad}((\operatorname{Ad} h)(x)) = \operatorname{Ad} h \circ \operatorname{Ad} x \circ (\operatorname{Ad} h)^{-1},$$

откуда $\lambda_{\mathfrak{h}}((\operatorname{Ad} h)(x)) = \lambda_{\mathfrak{h}}(x)$. Таким образом, функция $\lambda_{\mathfrak{h}}$ инвариантна относительно $\operatorname{Ad}(H)$, чем завершается доказательство предложения.

Замечание. Рассмотрим функцию $\lambda_{\mathfrak{g}}$, ассоциированную с компактной группой Ли G. В силу теоремы 1 из § 2, n° 1, для вычисления $\lambda_{\mathfrak{g}}$ достаточно знать ее значения на $\mathfrak{t}$. Однако для любого $x \in \mathfrak{t}$ эндоморфизм $\operatorname{ad} x$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ полупрост и допускает в качестве собственных значений 0 (с кратностью r) и $\delta(\alpha)(x)$ для любого $\alpha \in R(G, T)$ (с кратностью 1). Отсюда сразу получаем формулу

$$\lambda_{\mathfrak{g}}(x) = \prod_{\alpha \in R(G, T)} \frac{e^{\delta(\alpha)(x)} - 1}{\delta(\alpha)(x)} = \frac{\delta_{\mathfrak{g}}(x)}{\pi_{\mathfrak{g}}(x)}, \tag{11}$$

где $\delta_{\mathfrak{g}}(x) = \delta_G(\exp x)$ и $\pi_{\mathfrak{g}}(x) = \prod_{\alpha \in R(G, T)} \delta(\alpha)(x) = \det \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{t}}(x)$.

Пусть $\omega_{G/T}$ — инвариантная дифференциальная форма на G/T степени $n - r$ и $\omega_{\mathfrak{t}}$ — дифференциальная форма степени r на $\mathfrak{t}$, инвариантная относительно сдвигов. В обозначениях n° 1 пусть $\omega_{G/T} \frown \omega_{\mathfrak{t}}$ — единственная дифференциальная форма $\omega_{\mathfrak{g}}$ степени n на $\mathfrak{g}$, инвариантная относительно сдвигов и такая, что $\omega_{\mathfrak{g}}(0) = \omega_{G/T}(\bar{e}) \frown \omega_{\mathfrak{t}}(0)$.

Наконец, обозначим через $\psi: (G/T) \times \mathfrak{t} \to \mathfrak{g}$ морфизм, полученный факторизацией из отображения $(g, x) \mapsto (\operatorname{Ad} g)(x)$ из $G \times \mathfrak{t}$ в $\mathfrak{g}$.

Предложение 3. *Пусть* $\omega_{\mathfrak{g}}, \omega_{\mathfrak{t}}, \omega_{G/T}$ — *инвариантные дифференциальные формы соответственно на* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{t}$, G/T *степени* n, r, $n - r$. *Если* $\omega_{\mathfrak{g}} = \omega_{G/T} \frown \omega_{\mathfrak{t}}$, *то*

$$\psi^* \omega_{\mathfrak{g}} = \omega_{G/T} \wedge \pi_{\mathfrak{g}} \omega_{\mathfrak{t}},$$

где $\pi_{\mathfrak{g}}$ — *функция на* $\mathfrak{t}$, *определяемая формулой* $\pi_{\mathfrak{g}}(x) = \prod_{\alpha \in R(G, T)} \delta(\alpha)(x)$.

Обозначим через ω_G (соотв. ω_T) инвариантную дифференциальную форму максимальной размерности на G (соотв. T), совпадающую в начале координат с $\omega_{\mathfrak{g}}$ (соотв. $\omega_{\mathfrak{t}}$). Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} (G/T) \times \mathfrak{t} & \xrightarrow{\psi} & \mathfrak{g} \\ \downarrow {\scriptstyle (\mathrm{Id}, \exp_T)} & & \downarrow {\scriptstyle \exp_G} \\ (G/T) \times T & \xrightarrow[f]{} & G \end{array}$$

Принимая во внимание предложение 1 из n° 2 и соотношение $\exp_T^* \omega_T = \omega_{\mathfrak{t}}$, получаем равенство

$$\psi^* \exp_G^* \omega_G = \omega_{G/T} \wedge \delta_{\mathfrak{g}} \omega_{\mathfrak{t}}.$$

Согласно предложению 2, $\psi^* \exp_G^* \omega_G = (\psi^* \lambda_{\mathfrak{g}}) \psi^* \omega_{\mathfrak{g}}$. Поскольку функция $\lambda_{\mathfrak{g}}$ инвариантна относительно $\mathrm{Ad}(G)$, имеем

$$(\psi^* \lambda_{\mathfrak{g}})(\bar{g}, x) = \lambda_{\mathfrak{g}}(x) = \frac{\delta_{\mathfrak{g}}(x)}{\pi_{\mathfrak{g}}(x)} \text{ для } \bar{g} \in G/T,\ x \in \mathfrak{t}.$$

Отсюда следует, что формы $\psi^* \omega_G(\bar{g}, x)$ и $\omega_{G/T}(\bar{g}) \wedge \pi_{\mathfrak{g}}(x)\, \omega_{\mathfrak{t}}(x)$ совпадают в тех точках, где функция $\delta_{\mathfrak{g}}(x)$ не равна нулю, т. е. совпадают на открытом плотном подмножестве $(G/T) \times \mathfrak{t}_r$. Следовательно, формы $\psi^* \omega_G(\bar{g}, x)$ и $\omega_{G/T}(\bar{g}) \wedge \pi_{\mathfrak{g}}(x)\, \omega_{\mathfrak{t}}(x)$ совпадают всюду. Предложение доказано.

Выберем инвариантные дифференциальные формы максимальной степени ω_G на G и ω_T на T, такие, что $|\omega_G| = dg$ и $|\omega_T| = dt$. Обозначим через $\omega_{\mathfrak{g}}$ (соотв. $\omega_{\mathfrak{t}}$) инвариантную относительно сдвигов дифференциальную форму на $\mathfrak{g}$ (соотв. $\mathfrak{t}$), совпадающую с $\omega_G(e)$ (соотв. с $\omega_T(e)$) в начале координат, а через dz (соотв. dx) — меру Хаара $|\omega_{\mathfrak{g}}|$ (соотв. $|\omega_{\mathfrak{t}}|$). Рассуждая mutatis mutandis, как в n° 2, получаем следующее предложение:

Предложение 4. *Мера dz на $\mathfrak{g}$ есть образ меры $dg \otimes \frac{1}{w(G)} \pi_{\mathfrak{g}}\, dx$ при собственном отображении $(g, x) \mapsto (\mathrm{Ad}\, g)(x)$ из $G \times \mathfrak{t}$ в $\mathfrak{g}$.*

Мы предоставляем читателю самому сформулировать и доказать аналоги следствий с 1 по 3 и замечаний с 1 по 3 из n° 2. Например, пусть φ — интегрируемая функция на $\mathfrak{g}$ (со значениями в некотором банаховом пространстве или в $\bar{\mathbf{R}}$), тогда

$$\int_{\mathfrak{g}} \varphi(z)\, dz = \frac{1}{w(G)} \int_{\mathfrak{t}} \left(\int_G \varphi((\mathrm{Ad}\, g)(x))\, dg \right) \pi_{\mathfrak{g}}(x)\, dx, \qquad (12)$$

и, в частности, если φ инвариантна относительно $\mathrm{Ad}(G)$, то

$$\int_{\mathfrak{g}} \varphi(z)\, dz = \frac{1}{w(G)} \int_{\mathfrak{t}} \varphi(x)\, \pi_{\mathfrak{g}}(x)\, dx. \qquad (13)$$

4. Интегрирование сечений векторного расслоения

В этом и следующем пунктах через X обозначается вещественное многообразие класса C^r $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ локально конечной размерности.

Пусть Y — многообразие класса C^r. Если $r < \infty$, рассмотрим отображение $f \mapsto j^r(f)$ из $\mathscr{C}^r(X; Y)$ в $\mathscr{C}(X; J^r(X, Y))$ (*Мн., Св. рез.*, 12.3.7). Прообраз относительно этого отображения топологии компактной сходимости на $\mathscr{C}(X; J^r(X, Y))$ называется *топологией компактной C^r-сходимости* на $\mathscr{C}^r(X; Y)$; это есть верхняя грань топологий равномерной C^r-сходимости на K (*Мн., Св. рез.*, 12.3.10), когда K пробегает все компактные подмножества в X.

Если $r = \infty$, то *топологией компактной C^∞-сходимости* на $\mathscr{C}^\infty(X; Y)$ называется верхняя грань топологий компактной C^k-сходимости, или,

другими словами, самая слабая из топологий, в которых непрерывны канонические вложения $\mathscr{C}^{\infty}(X; Y) \to \mathscr{C}^{k}(X; Y)$ для $0 \leqslant k < \infty$.

Пусть E — вещественное векторное расслоение класса C^r с базой X, и пусть $\mathscr{S}^r(X; E)$ — векторное пространство сечений класса C^r расслоения E. В этом пункте будем считать, что пространство $\mathscr{S}^r(X; E)$ наделено топологией, индуцированной топологией компактной C^r-сходимости на $\mathscr{C}^r(X; E)$, вновь называемой топологией компактной C^r-сходимости. Эта топология превращает $\mathscr{S}^r(X; E)$ в *полное* отделимое локально выпуклое топологическое векторное пространство (см. *Мн.*, *Св. рез.*, 15.3.1 и *Th. spec.*).

Пусть H — группа Ли и $m: H \times X \to X$ — закон левого действия класса C^r; положим $hx = m(h, x)$ для $h \in H$, $x \in X$. Пусть E — векторное H-расслоение с базой X класса C^r (гл. III, § 1, n° 8, определение 4). Для $s \in \mathscr{S}^r(X; E)$ и $h \in H$ обозначим через ${}^h s$ сечение $x \mapsto h.s(h^{-1}x)$ расслоения E; отображение $(h, s) \mapsto {}^h s$ задает закон действия группы H на пространстве $\mathscr{S}^r(X; E)$.

Лемма 4. *Закон действия $H \times \mathscr{S}^r(X; E) \to \mathscr{S}^r(X; E)$ непрерывен.*

Принимая во внимание определение топологии в $\mathscr{S}^r(X; E)$ и теорему 3 из *Общ. топ.*, 1975, гл. X, § 3, n° 4, достаточно доказать, что для любого целого числа $k \leqslant r$ отображение $f: H \times X \times \mathscr{S}^k(X; E) \to J^k(X; E)$, такое, что $f(h, x, s) = j_x^k({}^h s)$, непрерывно. Для $h \in H$ обозначим через τ_h (соотв. θ_h) автоморфизм $x \to hx$ многообразия X (соотв. расслоения E). Определим отображения

$$f_1: H \times X \to J^k(X, X), \quad f_2: H \times E \to J^k(E, E),$$

$$g: H \times X \times \mathscr{S}^k(X; E) \to J^k(X, E)$$

по формулам $f_1(h, x) = j_x^k(\tau_h)$, $f_2(h, v) = j_v^k(\theta_h)$, $g(h, x, s) = j_{hx}^k(s)$. Тогда

$$f(h, x, s) = f_2(h, s(h^{-1}, x)) \circ g(h^{-1}, x, s) \circ f_1(h^{-1}, x)$$

и, стало быть, ввиду *Мн.*, *Св. рез.*, 12.3.6, достаточно доказать непрерывность отображений f_1, f_2 и g.

Но g есть композиция отображений

$$H \times X \times \mathscr{S}^k(X; E) \xrightarrow{(m, \mathrm{Id})} X \times \mathscr{S}^k(X; E) \xrightarrow{(\mathrm{Id}, j^k)}$$

$$\to X \times \mathscr{C}(X; J^k(X, E)) \xrightarrow{\varepsilon} J^k(X; E),$$

где $\varepsilon(x, u) = u(x)$. Ввиду непрерывности отображения ε (*Общ. топ.*, 1975, гл. X, § 3, n° 4, следствие 1) g непрерывно.

Пусть $(h_0, x_0) \in H \times X$; докажем, что отображение f_1 непрерывно в точке (h_0, x_0). Существуют карты (U, ψ, F) и (V, χ, F') на X и открытое подмножество Ω в H, такие, что $x_0 \in U$, $h_0 \in \Omega$ и $m(\Omega \times U) \subset V$. Используя выражения для $J^k(X, X)$ в этих картах, приходим к доказательству для $1 \leqslant l \leqslant k$ непрерывности в точке (h_0, x_0) отображения $(h, x) \mapsto \Delta_x^l(\tau_h)$ из $\Omega \times$

$\times U$ в $P_l(F;\, F')$, где $\Delta^l_x(\tau_h)(v)=\dfrac{1}{l!}\,D^l\,\tau_h(x).v$ для $v\in F$ (*Мн.*, *Св. рез.*, 12.2). Но $D^l\tau_h(x)$ есть не что иное, как l-я частная производная по x от $m(h,\, x)$, непрерывная по предположению; следовательно, и отображение f_1 непрерывно. Аналогично доказывается непрерывность f_2, что завершает доказательство леммы.

Предложение 5. *Предположим, что группа H компактна, и пусть dh — мера Хаара на H с полной массой 1. Пусть s — сечение расслоения E класса C^r. Для $x\in X$ обозначим через $s^{\#}$ векторный интеграл $\int_H {}^h s\, dh$. Тогда $s^{\#}$ есть сечение расслоения E класса C^r, инвариантное относительно H; для любого $x\in X$ имеем $s^{\#}(x)=\int_H hs\,(h^{-1}x)\,dh\in E_x$. Эндоморфизм $s\mapsto s^{\#}$ пространства $\mathscr{S}^r(X;\, E)$ есть проектор на подпространство H-инвариантных сечений.*

Рассмотрим отображение $h\mapsto {}^h s$ из H в $\mathscr{S}^r(X;\, E)$; согласно лемме 4, оно непрерывно. Поскольку пространство $\mathscr{S}^r(X;\, E)$ полно и отделимо, интеграл $s^{\#}=\int_H {}^h s\, dh$ принадлежит $\mathscr{S}^r(X;\, E)$ (*Интегр.*, гл. III, § 3, n° 3, следствие 2). Так как линейное отображение $s\mapsto s(x)$ из $\mathscr{S}^r(X;\, E)$ в E_x непрерывно, то $s^{\#}(x)=\int_H {}^h s\,(x)\,dh$ для любого $x\in X$. Очевидно, что $s^{\#}$ инвариантно относительно H. Если s есть H-инвариантное сечение, то $s^{\#}=s$, откуда следует последнее утверждение предложения.

Следствие 1. *Пусть F — банахово пространство, $\rho\colon H\to \mathbf{GL}(F)$ — линейное аналитическое представление и $f\in\mathscr{C}^r(X;\, F)$. Для $x\in X$ положим*

$$f^{\#}(x)=\int_H \rho(h).f\,(h^{-1}x)\,dh.$$

Тогда $f^{\#}$ есть морфизм класса C^r из X в F, перестановочный с действием группы H. Для любого $x\in X$

$$d_x f^{\#}=\int_H (\rho(h)\circ d_{h^{-1}x} f\circ T_x(\tau_{h^{-1}}))\,dh\in\mathscr{L}(T_x(X);\, F), \tag{14}$$

где через τ_h обозначается автоморфизм $x\mapsto hx$ многообразия X.

Первое утверждение вытекает из предложения 5, примененного к расслоению $X\times F$, на котором действие группы определяется по правилу $(h;\,(x,\, f))\mapsto(hx,\, \rho(h).f)$. Второе утверждение следует из предложения 2 из *Интегр.*, гл. III, n° 2, если к векторному интегралу $f^{\#}$ применить гомоморфизм $d_x\colon \mathscr{C}^r(X;\, F)\to\mathscr{L}(T_x(X);\, F)$, непрерывный по определению топологии компактной C^r-сходимости.

Следствие 2. *Пусть F — банахово пространство и $f\in\mathscr{C}^r(X;\, F)$; положим*

$$f^{\#}(x)=\int_H f(hx)\,dh$$

для $x\in X$. Тогда функция $f^{\#}$ принадлежит классу C^r и для $x\in X$, $h\in\in H$ справедливо равенство $f^{\#}(hx)=f^{\#}(x)$.

Следствие 3. *Пусть F — банахово пространство, p — целое число $\geqslant 0$ и ${}^k\Omega^p(X;F)$ — пространство дифференциальных форм на X степени p со значениями в F, принадлежащих классу C^k $(2\leqslant k+1\leqslant r)$. Для $\omega\in\in{}^k\Omega^p(X;F)$ положим $\omega^{\#}=\int_H \tau_h^*\omega dh$. Тогда отображение $\omega\mapsto\omega^{\#}$ есть проектор в ${}^k\Omega^p(X;F)$, образ которого является подпространством H-инвариантных форм. Для любой формы $\omega\in{}^k\Omega^p(X;F)$ справедливо равенство $d(\omega^{\#})=(d\omega)^{\#}$.*

Первое утверждение вытекает из предложения 5, примененного к векторному H-расслоению $\mathrm{Alt}^p(T(X);F)$ (гл. III, § 1, n° 8, примеры). Для доказательства второго утверждения достаточно, учитывая предложение 2 из *Интегр.*, гл. III, § 3, n° 2, проверить, что отображение d: ${}^k\Omega^p(X;F)\to{}^{k-1}\Omega^{p+1}(X;F)$ непрерывно при условии, что первое (соотв. второе) пространство наделено топологией компактной C^k-сходимости (соотв. C^{k-1}-сходимости). А это легко следует из определения этих топологий при помощи полунорм (*Th. spec.*) и из того, что d есть дифференциальный оператор порядка $\leqslant 1$ (*Мн., Св. рез.*, 14.4.2).

5. *Инвариантные дифференциальные формы*

Пусть X — вещественное многообразие класса C^∞ локально конечной размерности, и пусть $(g,x)\mapsto gx$ — закон левого действия класса C^∞ связной компактной группы Ли G на X. Для $g\in G$ обозначим через τ_g автоморфизм $x\mapsto gx$ многообразия X. Пусть $\Omega(X)$ — алгебра вещественных дифференциальных форм класса C^∞ на X (*Мн., Св. рез.*, 8.3.1).

Для любого элемента ξ из $\mathfrak{g}$ обозначим через D_ξ соответствующее ему векторное поле на X (гл. III, § 3, n° 5), а через $\theta(\xi)$, $i(\xi)$ соответствующие операторы на $\Omega(X)$, так что справедливы следующие формулы (*Мн., Св. рез.*, 8.4.5 и 8.4.7):

$$\theta(\xi)\,\omega=d(i(\xi)\,\omega)+i(\xi)\,d\omega, \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt}(\tau^*_{\exp t\xi}\omega)=\tau^*_{\exp t\xi}(\theta(\xi)\,\omega). \tag{16}$$

Дифференциальная форма $\omega\in\Omega(X)$ инвариантна, если $\tau_g^*\omega=\omega$ для любого $g\in G$; согласно формуле (16), это также означает, что $\theta(\xi)\,\omega=0$ для любого $\xi\in\mathfrak{g}$. Обозначим через $\Omega(X)^G$ подпространство инвариантных дифференциальных форм на X. Если $\omega\in\Omega(X)^G$, то $d\omega\in\Omega(X)^G$, и, стало быть, $\Omega(X)^G$ есть *подкомплекс комплекса* $(\Omega(X),d)$.

Теорема 2. *Каноническое вложение* $\iota\colon \Omega(X)^G \to \Omega(X)$ *есть гомотопизм комплексов* (*Alg*., chap. X, p. 33, def. 5); *отображение* $\omega \mapsto \omega^{\#} = \int_G \tau_g^* \omega\, dg$ *есть с точностью до гомотопии обратный к нему гомотопизм. В частности, отображение* $H(\iota)\colon H(\Omega(X)^G) \to H(\Omega(X))$ *биективно.*

Согласно следствию 3 из n° 4, отображение $\omega \mapsto \omega^{\#}$ является морфизмом комплексов из $\Omega(X)$ в $\Omega(X)^G$, индуцирующим тождественное отображение на подкомплексе $\Omega(X)^G$; таким образом, для доказательства теоремы достаточно построить такой градуированный гомоморфизм s: $\Omega(X) \to \Omega(X)$ степени -1, что

$$\omega^{\#} - \omega = (d \circ s + s \circ d)(\omega) \text{ для любого } \omega \in \Omega(X). \tag{17}$$

Согласно лемме 1 из *Интегр*., гл. IX, § 2, n° 4, и замечания 1 из § 2, n° 2, существует такая положительная мера $d\xi$ на $\mathfrak{g}$ с компактным носителем, что ее образ при экспоненциальном отображении равен dg. Для $\omega \in \Omega(X)$ положим

$$s(\omega) = \int_0^1 \left\{ \int_{\mathfrak{g}} \tau^*_{\exp t\xi}(i(\xi)\,\omega).d\xi \right\} dt$$

и покажем, что формула (17) выполняется. Аналогично тому, как это было сделано в доказательстве следствия 1 (n° 4), проверим формулу

$$ds(\omega) = \int_0^1 \left\{ \int_{\mathfrak{g}} \tau^*_{\exp t\xi}\, d(i(\xi)\,\omega).d\xi \right\} dt.$$

Тогда из формул (15) и (16) получим равенства

$$ds(\omega) + s(d\omega) = \int_0^1 \left\{ \int_{\mathfrak{g}} \tau^*_{\exp t\xi}(d(i(\xi)\,\omega) + i(\xi)\,d\omega).d\xi \right\} dt =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_{\mathfrak{g}} \tau^*_{\exp t\xi}(\theta(\xi)\,\omega).d\xi \right\} dt =$$

$$= \int_{\mathfrak{g}} \left\{ \int_0^1 \frac{d}{dt}(\tau^*_{\exp t\xi}\,\omega)\, dt \right\} d\xi =$$

$$= \int_{\mathfrak{g}} (\tau^*_{\exp t\xi}\,\omega - \omega)\, d\xi = \omega^{\#} - \omega,$$

что завершает доказательство теоремы 2.

Применим эту теорему в случае $X = G$ для действия группы Ли G левыми сдвигами. Напомним (гл. III, § 3, n° 13, предложение 50), что, ставя в соответствие дифференциальной форме на G ее значение в единице,

получаем изоморфизм пространства $\Omega(G)^G$ на градуированную алгебру $\mathrm{Alt}(\mathfrak{g})$ знакопеременных полилинейных форм на $\mathfrak{g}$. Отождествим $\Omega(G)^G$ с $\mathrm{Alt}(\mathfrak{g})$ при помощи этого изоморфизма. Тогда оператор d задается формулой (гл. III, § 3, n° 14, предложение 51)

$$d\omega(a_1, \ldots, a_{p+1}) =$$
$$= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([a_i, a_j], a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_{p+1})$$

для ω из $\mathrm{Alt}^p(\mathfrak{g})$ и $a_1, \ldots, a_{p+1}$ из $\mathfrak{g}$.

Для $\xi \in \mathfrak{g}$ обозначим через L_ξ соответствующее ему левоинвариантное векторное поле (определяемое при помощи действия группы G на себе *правыми* сдвигами, см. гл. III, § 3, n° 6). Операторы $\theta(L_\xi)$, $i(L_\xi)$ коммутируют с действием группы G на $\Omega(G)$ при помощи левых сдвигов и, стало быть, индуцируют операторы $\theta(\xi)$, $i(\xi)$ в подпространстве $\Omega(G)^G$, которые ввиду отождествления $\Omega(G)^G$ с $\mathrm{Alt}(\mathfrak{g})$ действуют по формулам (*Мн., Св. рез.*, 8.3.2. и 8.4.2)

$$(\theta(\xi)\omega)(a_1, \ldots, a_p) = -\sum \omega(a_1, \ldots, a_{i-1}, [\xi, a_i], a_{i+1}, \ldots, a_p),$$

$$(i(\xi)\omega)(a_1, \ldots, a_{p-1}) = \omega(\xi, a_1, \ldots, a_{p-1})$$

для ω из $\mathrm{Alt}^p(\mathfrak{g})$ и $a_1, \ldots, a_p$ из $\mathfrak{g}$.

Подкомплекс ${}^G\Omega(G)^G$ *биинвариантных* (гл. III, § 3, n° 13) форм отождествляется с подкомплексом $\mathrm{Alt}(\mathfrak{g})^G$ знакопеременных полилинейных форм на $\mathfrak{g}$, инвариантных относительно присоединенного представления (т. е. таких, что $\theta(\xi)\omega = 0$ для любого $\xi \in \mathfrak{g}$). Тогда имеем коммутативную диаграмму комплексов

$$\begin{array}{ccccc} {}^G\Omega(G)^G & \to & \Omega(G)^G & \to & \Omega(G) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathrm{Alt}(\mathfrak{g})^G & \to & \mathrm{Alt}(\mathfrak{g}) & & \end{array} \tag{18}$$

где горизонтальные стрелки обозначают канонические вложения, а вертикальные стрелки — изоморфизмы, индуцированные отображением $\omega \mapsto \omega(e)$.

Следствие 1. а) *В диаграмме* (18) *все морфизмы являются гомотопизмами.*

б) *Пусть* $\omega \in \mathrm{Alt}(\mathfrak{g})$. *Для того чтобы* ω *принадлежала* $\mathrm{Alt}(\mathfrak{g})^G$, *необходимо и достаточно, чтобы* $d\omega = 0$ *и* $d(i(\xi)\omega) = 0$ *для любого* $\xi \in \mathfrak{g}$. *Дифференциал комплекса* $\mathrm{Alt}(\mathfrak{g})^G$ *равен нулю.*

в) *Градуированное векторное пространство* $H(\Omega(G))$ *изоморфно* $\mathrm{Alt}(\mathfrak{g})^G$.

Из теоремы 2, примененной к действию группы G на G левыми сдвигами (соотв. к действию $((g, h); x) \mapsto gxh^{-1}$ группы $G \times G$ на G), вытекает, что каноническое вложение $\Omega(G)^G \to \Omega(G)$ (соотв. ${}^G\Omega(G)^G \to \Omega(G)$) есть гомотопизм. Отсюда, принимая во внимание *Alg.*, chap. X, p. 34, cor., получаем а).

Докажем б). Согласно предложению 51 из гл. III, § 3, n° 14, имеем $d\alpha = -d\alpha$, т. е. $d\alpha = 0$, для любой одновременно левоинвариантной и правоинвариантной дифференциальной формы α на G. Если $\omega \in \mathrm{Alt}(\mathfrak{g})^G$, то $d\omega = 0$ и, следовательно, $d(i(\xi)\omega) = \theta(\xi)\omega - i(\xi)d\omega = 0$. Обратно, если $d\omega = 0$ и $d(i(\xi)\omega) = 0$, то $\theta(\xi)\omega = 0$.

Утверждение в) следует из а) и б).

Замечание. Рассмотрим подкомплексы $Z(\Omega(G))$ и $B(\Omega(G))$ в $\Omega(G)$ (*Alg.*, chap. X, p. 25). Из формулы, задающей дифференциал произведения двух форм (*Мн.*, *Св. рез.*, 8.3.5.), следует, что $Z(\Omega(G))$ — подалгебра в $\Omega(G)$, а $B(\Omega(G))$ — идеал в $Z(\Omega(G))$; стало быть, внешнее произведение индуцирует на $H(\Omega(G))$ структуру градуированной алгебры. Тогда из сказанного выше получаем изоморфизм градуированных *алгебр* $H(\Omega(G)) \to \mathrm{Alt}(\mathfrak{g})^G$.

Пусть H — замкнутая подгруппа в G; применим теорему 2 к $X = G/H$. Согласно следствию 1 предложения 17 из гл. III, § 1, n° 8, G-инвариантные дифференциальные формы на G/H отождествляются с H-инвариантными элементами в $\mathrm{Alt}(T_e(G/H))$, или, что то же самое, с H-инвариантными элементами в $\mathrm{Alt}(\mathfrak{g})$, которые аннулируются операторами $i(\xi)$ для любого $\xi \in L(H)$. Отсюда получаем

Следствие 2. *Пусть H — замкнутая подгруппа в G.*

а) *Каноническое вложение $\Omega(G/H)^G \to \Omega(G/H)$ есть гомотопизм.*

б) *Комплекс $\Omega(G/H)^G$ отождествляется с подкомплексом в* $\mathrm{Alt}(\mathfrak{g})$, *состоящим из элементов ω из* $\mathrm{Alt}(\mathfrak{g})$, *инвариантных относительно присоединенного представления группы H и таких, что $i(\xi)\omega = 0$ для любого $\xi \in L(H)$. Если, кроме того, группа H связна, то этот подкомплекс состоит из таких форм $\omega \in \mathrm{Alt}(\mathfrak{g})$, что $\theta(\xi)\omega = 0$ и $i(\xi)\omega = 0$ для любого $\xi \in L(H)$.*

§ 7. Неприводимые представления связных компактных групп Ли[1])

Обозначения § 6 сохраняются. Представлением группы Ли G называется любой непрерывный (следовательно, аналитический) гомоморфизм группы Ли G в группу Ли $\mathbf{GL}(V)$, *где V —* комплексное *векторное пространство* конечной размерности. *Любое представление группы Ли G полупросто* (§ 1, n° 1).

Выберем камеру C в $\mathfrak{t}$ (§ 5, n° 2) *и положим* $\Gamma(T)_{++} = \bar{C} \cap \Gamma(T)$.

[1]) В этом и следующих параграфах ссылка *Th. spec.* означает посвященную линейным представлениям компактных групп главу французского издания книги «*Théories Spectrales*», которая готовится к печати.

1. Доминантные веса

Обозначим через X_+ множество элементов λ из $X(T)$, таких, что $\langle\lambda, x\rangle \geqslant 0$ для любого $x \in \Gamma(T)_{++}$, т. е. таких, что линейная форма $\delta(\lambda)$: $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ отображает камеру C пространства $\mathfrak{t}$ в $i\mathbf{R}_+$.

Наделим $X(T)$ структурой упорядоченной группы, для которой положительными элементами являются элементы из X_+. Положим $R_+ = R(G, T) \cap X_+$ и $R_- = -R_+$. Элементы из R_+ называются *положительными корнями*, а элементы из R_- — *отрицательными корнями*. Любой корень является либо положительным, либо отрицательным (гл. VI, § 1, n° 6, теорема 3). Положительный корень, который не является суммой двух положительных корней, называется *простым*. Любой положительный корень является суммой простых корней (*там же*). Простые корни образуют базис подгруппы в $X(T)$, порожденной корнями. Эта подгруппа отождествляется с $X(T/C(G))$ (§ 4, n° 4). Отражения относительно простых корней порождают группу Вейля $W = W_G(T)$ (гл. VI, § 1, n° 5, теорема 2).

Лемма 1. *Пусть λ — элемент из $X(T)$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $\lambda - w(\lambda) \geqslant 0$ (соотв. >0) *для любого $w \in W$, такого, что $w \neq 1$;*

(ii) *для любого $w \in W$, такого, что $w \neq 1$, $\lambda - w(\lambda)$ есть линейная комбинация простых корней с неотрицательными* (соотв. *неотрицательными, не равными одновременно нулю*) *коэффициентами*;

(iii) $\langle\lambda, K_\alpha\rangle \geqslant 0$ (соотв. >0) *для любого положительного корня α;*

(iv) $\langle\lambda, K_\alpha\rangle \geqslant 0$ (соотв. >0) *для любого простого корня α.*

Эквивалентность (iii) и (iv) очевидна. Поскольку множество всех K_α отождествляется с дуальной к $R(G, T)$ системой корней (§ 4, n° 5), то эквивалентность утверждений (i) и (iii) вытекает из предложения 18 и следствия из гл. VI, § 1, n° 6. Импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) тривиальна, а обратная импликация также вытекает из гл. VI, § 1, n° 6.

Обозначим через X_{++} множество элементов из $X(T)$, таких, что $\langle\lambda, K_\alpha\rangle \geqslant 0$ для любого положительного корня α. Элементы из X_{++} называются *доминантными*. Они образуют фундаментальную область для W в $X(T)$ (гл. VI, § 1, n° 10). Имеем $X_{++} \subset X_+$.

Если группа G односвязна, то для каждого простого корня α существует элемент ϖ_α из $X(T)$, такой, что $\langle\varpi_\beta, K_\alpha\rangle = \delta_{\alpha\beta}$ для любого простого корня β, т. е. $s_\alpha(\varpi_\alpha) = \varpi_\alpha - \alpha$, $s_\beta(\varpi_\alpha) = \varpi_\alpha$ для любого простого корня $\beta \neq \alpha$. Элементы ϖ_α называются *фундаментальными* доминантными весами. Они образуют базис коммутативной группы $X(T)$ и коммутативного моноида X_{++}; другими словами, любой элемент λ из $X(T)$ записывается в виде $\lambda = \sum\limits_\alpha \langle\lambda, K_\alpha\rangle\, \varpi_\alpha$.

Обозначим через ρ такой элемент из $X(T) \otimes \mathbf{Q}$, что $2\rho = \sum\limits_{\alpha \in R_+} \alpha$.

Тогда $\langle \rho, K_\alpha \rangle = 1$ для любого простого корня α (гл. VI, § 1, n° 10, предложение 29). Если группа Ли G односвязна, то ρ есть сумма фундаментальных доминантных весов.

2. Старший вес неприводимого представления

С любым представлением $\tau: G \to \mathbf{GL}(V)$ ассоциируется гомоморфизм $L(\tau)_{(\mathbf{C})}$ $\mathbf{C}$-алгебры Ли $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$ в пространство $\operatorname{End}(V)$, продолжающий линейное представление $L(\tau)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в вещественном векторном пространстве, лежащем ниже V (гл. III, § 3, n° 11). Согласно предложению 7 из § 4, n° 3, отображение δ из $\mathrm{X}(T)$ в $\operatorname{Hom}_\mathbf{C}(\mathfrak{t}_\mathbf{C}, \mathbf{C}) = \mathfrak{t}_\mathbf{C}^*$ биективно отображает множество весов представления τ относительно T на множество весов представления $L(\tau)_{(\mathbf{C})}$ относительно подалгебры Картана $\mathfrak{t}_\mathbf{C}$ в $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$.

Лемма 2. *Пусть φ — линейное представление комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$ в комплексном векторном пространстве V конечной размерности. Для существования представления τ группы Ли G в пространстве V, такого, что $L(\tau)_{(\mathbf{C})} = \varphi$, необходимо и достаточно, чтобы φ было полупросто, а веса модуля V относительно подалгебры Картана $\mathfrak{t}_\mathbf{C}$ принадлежали $\delta(\mathrm{X}(T))$.*

Если существует представление τ группы Ли G, такое, что $L(\tau)_{(\mathbf{C})} = \varphi$, то представление φ полупросто, так как G связна, представление τ полупросто (гл. III, § 6, n° 5, следствие 2 предложения 13), а веса модуля V относительно $\mathfrak{t}_\mathbf{C}$ принадлежат образу отображения δ. Таким образом, необходимость доказана; докажем достаточность. Если φ полупросто, V есть прямая сумма пространств $V_\mu(\mathfrak{t}_\mathbf{C})$, где μ пробегает множество весов модуля V относительно $\mathfrak{t}_\mathbf{C}$ (гл. VII, § 2, n° 4, следствие 3 теоремы 2). Если все веса принадлежат образу отображения δ, то существует такое представление τ_T тора T в пространстве V, что $L(\tau_T)_{(\mathbf{C})} = \varphi | \mathfrak{t}_\mathbf{C}$: действительно, достаточно положить $\tau_T(t)\, v = t^\lambda v$ для $t \in T$ и $v \in V_{\delta(\lambda)}(\mathfrak{t}_\mathbf{C})$. Таким образом, лемма следует из предложения 8 из § 2, n° 6.

Теорема 1. а) *Пусть $\tau: G \to \mathbf{GL}(V)$ — неприводимое представление группы Ли G. Тогда множество весов представления τ (относительно T) имеет максимальный элемент λ — старший вес, который является доминантным весом, и пространство $V_\lambda(T)$ одномерно.*

б) *Для того чтобы два неприводимых представления группы Ли G были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их старшие веса были равны.*

в) *Для любого доминантного элемента λ из $\mathrm{X}(T)$ существует неприводимое представление группы Ли G со старшим весом λ.*

Согласно лемме 2, классы эквивалентности неприводимых представлений группы Ли G биективно соответствуют классам неприводимых

конечномерных представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}$ со старшими весами, принадлежащими $\delta(X(T))$.

Обозначим через $\mathscr{C}\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ центр, а через $\mathscr{D}\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ — производную алгебру алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, так что $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}=\mathscr{C}\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}\oplus\mathscr{D}\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. Для любой линейной формы μ на $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}\cap\mathscr{D}\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ обозначим через $E(\mu)$ простой $\mathscr{D}\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$-модуль, введенный в гл. VIII, § 6, n° 3. Для любой линейной формы ν на $\mathscr{C}\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ через $\mathbf{C}(\nu)$ обозначим ассоциированный $\mathscr{C}\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$-модуль размерности 1 над $\mathbf{C}$. Тогда $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$-модули $\mathbf{C}(\nu)\otimes E(\mu)$ просты, и, согласно следствию 2 теоремы 1 из гл. VIII, § 7, n° 2, и *Alg.*, chap. VIII, § 11, n° 1, th. 1, любой простой конечномерный $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$-модуль изоморфен $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$-модулю вида $\mathbf{C}(\nu)\otimes E(\mu)$; кроме того (*там же*), модуль $\mathbf{C}(\nu)\otimes E(\mu)$ имеет конечную размерность тогда и только тогда, когда числа $\mu(H_\alpha)$ целые и положительные для любого простого корня α. Если через $\nu+\mu$ обозначить линейную форму на $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$, которая индуцирует форму ν на $\mathscr{C}\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ и форму μ на $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}\cap\mathscr{D}\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, то $(\nu+\mu)(H_\alpha)=\mu(H_\alpha)$; кроме того, веса модуля $\mathbf{C}(\nu)\otimes E(\mu)$ имеют вид $\nu+\lambda$, где λ пробегает веса модуля $E(\mu)$, т. е. имеют вид $\nu+\mu-\theta$, где $\theta\in\delta(X_+)$ (гл. VIII, § 6, n° 2, лемма 2).

Отсюда заключаем, что $\mathfrak{g}$-модуль $\mathbf{C}(\nu)\otimes E(\mu)$ имеет конечную размерность тогда и только тогда, когда числа $(\nu+\mu)(H_\alpha)$ целые и неотрицательные для любого простого корня α, а его веса принадлежат $\delta(X(T))$ тогда и только тогда, когда $\nu+\mu$ принадлежит $\delta(X(T))$. Объединение этих двух условий означает, что $\nu+\mu$ принадлежит $\delta(X_{++})$; в этом случае $\nu+\mu$ — старший вес модуля $\mathbf{C}(\nu)\otimes E(\mu)$. Тем самым для любого доминантного элемента λ из $X(T)$ построено неприводимое представление группы Ли G со старшим весом λ, а также получены, с точностью до эквивалентности, все неприводимые представления этой группы Ли. Так как векторы веса $\nu+\mu$ из $\mathbf{C}(\nu)\otimes E(\mu)$ образуют подпространство размерности 1, то теорема доказана.

Следствие. *Группа Ли G имеет точное линейное представление (конечной размерности).*

Сначала заметим, что любой элемент из $X(T)$ равен разности двух доминантных элементов: более точно, пусть ϖ — такой элемент из X_{++}, что $\langle\varpi, K_\alpha\rangle>0$ для любого простого корня α; для любого $\lambda\in X(T)$ существует такое целое положительное число n, что $\langle\lambda+n\varpi, K_\alpha\rangle\geqslant 0$ для любого простого корня α, т. е. (n° 1, лемма 1) $\lambda+n\varpi\in X_{++}$.

Отсюда следует, что существует конечное семейство $(\lambda_i)_{i\in I}$ элементов из X_{++}, порождающее $\mathbf{Z}$-модуль $X(T)$. Для $i\in I$ обозначим через τ_i неприводимое представление группы G со старшим весом λ_i (теорема 1). Пусть τ — прямая сумма представлений τ_i. По построению множество $P(\tau, T)$ весов представления τ (относительно T) порождает $\mathbf{Z}$-модуль $X(T)$. Тогда из предложения 6 из § 4, n° 3, вытекает, что гомоморфизм τ инъективен, и следствие доказано.

Замечания. 1) Пусть $\mathfrak{n}_+$ — подалгебра в $\mathfrak{g}_C$, являющаяся суммой $\mathfrak{g}^\alpha$ для $\alpha>0$. Пусть $\tau\colon G\to\mathbf{GL}(V)$ — неприводимое представление со стар-

шим весом $\lambda \in X_{++}$, а $\tau' : \mathfrak{g}_{\mathbf{C}} \to \mathfrak{gl}(V)$ — представление, полученное из τ. Тогда $V_\lambda(T)$ — подпространство, состоящее из тех векторов $v \in V$, для которых $\tau'(x)\, v = 0$ для любого $x \in \mathfrak{n}_+$.

В самом деле, это следует из соответствующего утверждения для $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$-модулей $\mathbf{C}(\nu) \otimes E(\mu)$ (гл. VIII, § 6, n° 2, предложение 3).

2) Пусть $\Theta(G)$ — алгебра непрерывных представляющих функций на G со значениями в $\mathbf{C}$ (*Alg.*, chap. VIII). Пусть группа Ли G действует на $\Theta(G)$ левыми и правыми сдвигами. Для каждого $\lambda \in X_{++}$ обозначим через $(V_\lambda, \tau_\lambda)$ неприводимое представление группы G со старшим весом λ (теорема 1), а через $(V_\lambda^*, \check{\tau}_\lambda)$ — контрагредиентное представление (гл. III, § 3, n° 11). Тогда, согласно *Th. spec.*, представление группы Ли $G \times G$ в пространстве $\Theta(G)$ изоморфно прямой сумме представлений $(V_\lambda \otimes V_\lambda^*, \tau_\lambda \otimes \check{\tau}_\lambda)$, где λ пробегает X_{++}. Из замечания 1 получаем следующее утверждение. *Пусть $\lambda \in X_{++}$, и пусть E_λ — подпространство в $\Theta(G)$, состоящее из таких непрерывных представляющих функций f на G, что $f(gt) = \lambda(t)^{-1} f(g)$ для любого $g \in G$ и любого $t \in T$, а $f * x = 0$ для любого $x \in \mathfrak{n}_- = \bigoplus\limits_{\alpha<0} \mathfrak{g}^\alpha$. Тогда пространство E_λ устойчиво относительно левых сдвигов, представление группы G в E_λ при помощи левых сдвигов неприводимо и имеет старший вес λ.*

3) Пусть $\tau : G \to \mathbf{GL}(V)$ — неприводимое представление. Существует такой элемент ν из $\mathrm{X}(C(G))$, что $\tau(s)\, v = \nu(s)\, v$ для $s \in C(G)$, $v \in V$: действительно, $\tau(C(G))$ содержится в коммутанте $\tau(G)$, который равен $\mathbf{C}^* . 1_V$ (*Alg.*, chap. VIII, § 3, n° 2, th. 1). Для любого веса λ представления τ ограничение λ на $C(G)$ совпадает с ν.

4) Определения и результаты из гл. VIII, § 7, nn° 2—5, без труда обобщаются на данный случай; мы предоставляем сделать это читателю.

Предложение 1. *Пусть $\tau : G \to \mathbf{GL}(V)$ — неприводимое представление группы Ли G со старшим весом $\lambda \in X_{++}$. Пусть m — целое число $\sum\limits_{\alpha \in R_+} \langle \lambda, K_\alpha \rangle$, и пусть w_0 — такой элемент группы Вейля, что $w_0(R_+) = R_-$* (гл. VI, § 1, n° 6, следствие 3 предложения 17). *Имеет место один из трех случаев:*

а) *$w_0(\lambda) = -\lambda$ и число m четно. Тогда существует инвариантная относительно G невырожденная симметрическая билинейная форма на V; τ — представление вещественного типа* (дополнение II).

б) *$w_0(\lambda) \neq -\lambda$. Любая инвариантная относительно G билинейная форма на V равна нулю; τ — представление комплексного типа* (*там же*).

в) *$w_0(\lambda) = -\lambda$ и число m нечетно. Существует инвариантная относительно G невырожденная знакопеременная билинейная форма на V; τ — представление кватернионного типа* (*там же*).

Если ограничение представления τ на $C(G)_0$ нетривиально, то имеет место случай б).

Билинейная форма B на V инвариантна относительно G тогда и только тогда, когда она инвариантна относительно $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ (гл. III, § 6, n° 5,

следствие 3). Если группа Ли G полупроста, то доказываемое предложение следует из предложения 12 из гл. VIII, § 7, n° 5, и из предложения 3 дополнения II.

В общем случае положим $C(G)_0 = S$ и отождествим $\mathrm{X}(T/S)$ с подгруппой в $\mathrm{X}(T)$ (инвариантной относительно W). Если $\tau(S) = \{1_V\}$, то τ индуцирует при переходе к факторпредставлению представление $\tau'\colon G/S \to \mathbf{GL}(V)$ со старшим весом λ; в этом случае предложение следует из вышесказанного, примененного к G/S.

Предположим, что $\tau(S) \neq \{1_V\}$. Тогда существует ненулевой элемент ν из $\mathrm{X}(S)$, такой, что $\tau(s) = \nu(s)_V$ для любого $s \in S$ (замечание 3). В этом случае ν есть образ элемента λ при гомоморфизме ограничения $\mathrm{X}(T) \to \mathrm{X}(S)$. Поскольку группа W действует тривиально на $\mathrm{X}(S)$, равенство $w_0(\lambda) = -\lambda$ влечет за собой $\nu = -\nu$, что невозможно; следовательно, $w_0(\lambda) \neq -\lambda$. С другой стороны, если B — билинейная форма на V, инвариантная относительно G, то для x, y из V и s из S

$$B(\nu(s)x,\ \nu(s)y) = B(x, y) = \nu(s)^2 B(x, y),$$

откуда $B = 0$, и предложение доказано.

Пусть $\mathfrak{S}_{\mathbf{R}}(G)$ — множество классов неприводимых непрерывных представлений группы G в конечномерных вещественных векторных пространствах. Из предложения 1 и результатов дополнения II получаем биекцию $\Phi\colon X_{++}/\Sigma \to \mathfrak{S}_{\mathbf{R}}(G)$, где через Σ обозначается подгруппа $\{1, -w_0\}$ в $\mathrm{Aut}(\mathrm{X}(T))$. Более точно, пусть $\lambda \in X_{++}$, и пусть E_λ — представление группы Ли G со старшим весом λ; тогда

$$\Phi(\{\lambda, -w_0(\lambda)\}) = E_{\lambda\,[\mathbf{R}]},\ \text{если } \lambda \neq -w_0(\lambda) \text{ или если } \sum_{\alpha \in R_+} \langle \lambda, K_\alpha \rangle \notin 2\mathbf{Z},$$

$$\Phi(\{\lambda, -w_0(\lambda)\}) = E'_\lambda, \qquad \text{если } \lambda = -w_0(\lambda) \qquad \text{и} \qquad \sum_{\alpha \in R_+} \langle \lambda, K_\alpha \rangle \in 2\mathbf{Z},$$

где E'_λ является $\mathbf{R}$-структурой на E_λ, инвариантной относительно G.

3. Кольцо $R(G)$

Пусть $R(G)$ — кольцо классов (непрерывных конечномерных комплексных) представлений группы G (*Alg.*, chap. VIII, § 10, n° 6). Если τ — представление группы Ли G, то через $[\tau]$ будем обозначать его класс в $R(G)$. Если τ и τ' — два представления группы Ли G, то по определению

$$[\tau] + [\tau'] = [\tau \oplus \tau'], \quad [\tau]\ [\tau'] = [\tau \otimes \tau'].$$

Поскольку любое представление этой группы Ли полупросто, $\mathbf{Z}$-модуль $R(G)$ свободен и допускает в качестве базиса множество классов неприводимых представлений группы Ли G; это множество отождествляется при помощи теоремы 1 с X_{++}. Отображение $\tau \mapsto L(\tau)_{(\mathbf{C})}$ индуцирует гомомор-

физм l кольца $R(G)$ в кольцо $\mathscr{R}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ (гл. VIII, § 7, n° 6).

Пусть $\tau: G \to \mathbf{GL}(V)$ — представление группы Ли G. Рассмотрим градуировку $(V_\lambda(T))_{\lambda \in \mathrm{X}(T)}$ векторного $\mathbf{C}$-пространства V. Обозначим через $\mathrm{Ch}(V)$ или через $\mathrm{Ch}(\tau)$ *характер* градуированного векторного пространства V (гл. VIII, § 7, n° 7). Если через $(e^\lambda)_{\lambda \in \mathrm{X}(T)}$ обозначить канонический базис кольца $\mathbf{Z}[\mathrm{X}(T)] = \mathbf{Z}^{(\mathrm{X}(T))}$, то по определению

$$\mathrm{Ch}(\tau) = \sum_{\lambda \in \mathrm{X}(T)} (\dim V_\lambda(T))\, e^\lambda.$$

Тем самым определен (*там же*) гомоморфизм колец, также обозначаемый через Ch, из $R(G)$ в $\mathbf{Z}[\mathrm{X}(T)]$. Если группа Ли G полупроста, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} R(G) & \xrightarrow{\mathrm{Ch}} & \mathbf{Z}[\mathrm{X}(T)] \\ {\scriptstyle l}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\delta}} \\ \mathscr{R}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}) & \xrightarrow{\mathrm{Ch}} & \mathbf{Z}(P) \end{array} \tag{1}$$

где через P обозначается группа весов системы $R(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$, а через $\tilde{\delta}$ — гомоморфизм, полученный из δ.

Группа Вейля W действует автоморфизмами в группе $\mathrm{X}(T)$ и, следовательно, в кольце $\mathbf{Z}[\mathrm{X}(T)]$. Согласно предложению 5 из § 4, n° 3, образ гомоморфизма Ch содержится в подкольце $\mathbf{Z}[\mathrm{X}(T)]^W$, состоящем из элементов, инвариантных относительно группы W.

Предложение 2. *Гомоморфизм* Ch *индуцирует изоморфизм кольца* $R(G)$ *на* $\mathbf{Z}[\mathrm{X}(T)]^W$.

Для $\lambda \in X_{++}$ обозначим через $[\lambda]$ класс в $R(G)$ неприводимого представления со старшим весом λ. Поскольку семейство $([\lambda])_{\lambda \in X_{++}}$ образует базис $\mathbf{Z}$-модуля $R(G)$, достаточно доказать следующее утверждение:

Семейство $(\mathrm{Ch}[\lambda])_{\lambda \in \mathrm{X}_{++}}$ *образует базис* $\mathbf{Z}$*-модуля* $\mathbf{Z}[\mathrm{X}(T)]^W$.

Для любого элемента $u = \sum_\lambda a_\lambda e^\lambda$ из $\mathbf{Z}[\mathrm{X}(T)]$ назовем максимальными членами элемента u такие $a_\lambda e^\lambda$, что λ — максимальный элемент множества тех $\mu \in \mathrm{X}(T)$, для которых $a_\mu \neq 0$. Из теоремы 1 вытекает, что элемент $\mathrm{Ch}[\lambda]$ обладает единственным максимальным членом, а именно e^λ. Теперь предложение вытекает из следующей леммы:

Лемма 3. *Для каждого* $\lambda \in X_{++}$ *обозначим через* C_λ *элемент из* $\mathbf{Z}[\mathrm{X}(T)]^W$, *имеющий единственный максимальный член* e^λ. *Тогда семейство* $(C_\lambda)_{\lambda \in X_{++}}$ *образует базис в* $\mathbf{Z}[\mathrm{X}(T)]^W$.

Доказательство проводится так же, как доказательство предложения 3 из гл. VI, § 3, n° 4, с заменой A на $\mathbf{Z}$, P на $\mathrm{X}(T)$ и $P \cap \bar{C}$ на X_{++}.

Пусть $\Theta(G)$ (соотв. $\Theta(T)$) есть $\mathbf{C}$-алгебра непрерывных представляющих функций на G (соотв. T), и пусть $Z\Theta(G)$ (соотв. $\Theta(T)^W$) — подалгебра,

состоящая из центральных (соотв. инвариантных относительно W) функций из $\Theta(G)$ (соотв. $\Theta(T)$). Отображение ограничения $\Theta(G) \to \Theta(T)$ индуцирует гомоморфизм колец $r\colon Z\Theta(G) \to \Theta(T)^W$. С другой стороны, отображение, которое представлению τ ставит в соответствие его характер (т. е. функцию $g \mapsto \operatorname{Tr} \tau(g)$), продолжается до гомоморфизма $\mathbf{C}$-алгебр $\operatorname{Tr}\colon \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}} R(G) \to Z\Theta(G)$, который, согласно *Th. spec.*, является *изоморфизмом.* Аналогично из канонического вложения $\mathrm{X}(T) \to \Theta(T)$ получаем изоморфизм $\mathbf{C}$-алгебр $\iota\colon \mathbf{C}[\mathrm{X}(T)] \to \Theta(T)$, который индуцирует изоморфизм $\iota\colon \mathbf{C}[\mathrm{X}(T)]^W \to \Theta(T)^W$. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}} R(G) & \xrightarrow{1 \otimes \mathrm{Ch}} & \mathbf{C}[\mathrm{X}(T)]^W \\ {\scriptstyle \mathrm{Tr}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota} \\ Z\Theta(G) & \xrightarrow{\quad r \quad} & \Theta(T)^W \end{array} \tag{2}$$

коммутативна: действительно, для любого представления $\tau\colon G \to \mathbf{GL}(V)$ и любого $t \in T$

$$\operatorname{Tr} \tau(t) = \sum_{\lambda \in \mathrm{X}(T)} (\dim V_\lambda(T))\, \lambda(t) = \iota(\mathrm{Ch}\, \tau)(t),$$

т. е. $(r \circ \operatorname{Tr})[\tau] = (\iota \circ \mathrm{Ch})[\tau]$.

Теперь из предложения получаем следующий результат.

Следствие. *Отображение ограничения $r\colon Z\Theta(G) \to \Theta(T)^W$ есть биекция.*

4. *Формула характеров*

В этом пункте группа $\mathrm{X}(T)$ считается мультипликативной, а ее элементы рассматриваются как комплекснозначные функции на T. *Предполагается, что элемент ρ из $\mathrm{X}(T) \otimes \mathbf{Q}$ принадлежит $\mathrm{X}(T)$.*

Через $L^2(T)$ обозначим гильбертово пространство классов комплексных функций, квадратично интегрируемых на T, а через $\Theta(T)$ — подпространство, состоящее из непрерывных представляющих функций. Согласно *Th. spec.*, $\mathrm{X}(T)$ образует ортонормированный базис в $L^2(T)$ и алгебраический базис в $\Theta(T)$.

Для $f \in L^2(T)$ и $w \in W$ обозначим через ${}^w f$ элемент из $L^2(T)$, определяемый равенством ${}^w f(t) = f(w^{-1}(t))$. Тогда для $\lambda \in \mathrm{X}(T)$ имеем ${}^w\lambda = w(\lambda)$. Обозначим через $\varepsilon\colon W \to \{1, -1\}$ *сигнатуру* (единственный гомоморфизм, такой, что $\varepsilon(s) = -1$ для любого отражения s). Для $f \in L^2(T)$ положим

$$J(f) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, {}^w f.$$

Если $\lambda \in X_{++}$, то все характеры ${}^w(\lambda\rho)$ различны; в самом деле, достаточно доказать, что ${}^w(\lambda\rho) \neq \lambda\rho$ для любого $w \neq 1$. Однако это следует из леммы 1 (n° 1) и из соотношений $\langle \lambda\rho, K_\alpha \rangle = \langle \lambda, K_\alpha \rangle + 1 > 0$ для любого положительного корня α. В качестве следствия получаем

$$\|J(\lambda\rho)\|^2 = \operatorname{Card}(W) = w(G).$$

Говорят, что элемент $f \in L^2(T)$ *антиинвариантен*, если ${}^wf = \varepsilon(w) f$ для любого $w \in W$ (т. е. если ${}^sf = -f$ для любого отражения s). Покажем, что $\frac{1}{w(G)} J$ — *ортогональный проектор* пространства $L^2(T)$ на подпространство антиинвариантных элементов. Действительно, пусть f, f' — элементы из $L^2(T)$, причем f' антиинвариантен; тогда элемент $J(f)$ антиинвариантен и

$$\langle f', J(f)\rangle = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \langle f', {}^wf\rangle = \sum_{w \in W} \langle {}^wf', {}^wf\rangle =$$
$$= \sum_{w \in W} \langle f', f\rangle = w(G) \langle f', f\rangle.$$

Предложение 3. *Элементы $J(\lambda\rho)/\sqrt{w(G)}$, где $\lambda \in X_{++}$, образуют ортонормированный базис подпространства антиинвариантных элементов в $L^2(T)$ и алгебраический базис подпространства антиинвариантных элементов в $\Theta(T)$.*

Доказательство проводится так же, как доказательство предложения 1 из гл. VI, § 3, n° 3.

Согласно предложению 2 из гл. VI, § 3, n° 3,

$$J(\rho) = \rho \prod_{\alpha > 0} (1 - \alpha^{-1}) = \rho^{-1} \prod_{\alpha > 0} (\alpha - 1); \tag{3}$$

следовательно,

$$J(\rho)\overline{J(\rho)} = \prod_{\alpha} (\alpha - 1). \tag{4}$$

Отсюда ввиду следствия 2 теоремы 1 (§ 6, n° 2) получаем такой результат:

Лемма 4. *Если φ и ψ — две центральные непрерывные функции на G, то имеет место формула*

$$\int_G \overline{\varphi(g)}\, \psi(g)\, dg = \frac{1}{w(G)} \int_T \overline{(\varphi(t) J(\rho)(t))} . (\psi(t) J(\rho)(t))\, dt.$$

Для любого $\lambda \in X_{++}$ обозначим через χ_λ характер неприводимого представления группы G со старшим весом λ.

Теорема 2 (Г. Вейль). *Для любого $\lambda \in X_{++}$ справедливо равенство $J(\rho).\chi_\lambda | T = J(\lambda\rho)$.*

Функция $J(\rho).\chi_\lambda | T$ антиинвариантна относительно W и является линейной комбинацией с целыми коэффициентами элементов из $X(T)$. Тогда, согласно предложению 1 из гл. VI, § 3, n° 3, она записывается в виде

$\sum_{\mu} \alpha_{\mu} J(\mu\rho)$, где μ пробегает X_{++} и где α_{μ} — целые числа, из которых лишь конечное число отлично от нуля. Поскольку $\int_G |\chi_{\lambda}(g)|^2 dg = 1$ (*Th. spec.*), из предложения 3 и леммы 4 получаем равенство $\sum_{\mu} (\alpha_{\mu})^2 = 1$, откуда получаем, что все a_{μ} равны нулю, за исключением одного из них, равного 1 или -1. Но коэффициент при λ в $\chi_{\lambda}|T$ равен 1 (теорема 1); следовательно, коэффициент при $\lambda\rho$ в $J(\rho).\chi_{\lambda}(T)$ также равен 1 (гл. VI, § 3, n° 3, замечание 2), откуда $a_{\lambda\rho} = 1$, и теорема доказана.

Следствие 1. *В обозначениях* n° 3 *в кольце* $\mathbf{Z}[\mathrm{X}(T)]$ *имеем*

$$\left(\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\rho}\right) \mathrm{Ch}\,[\lambda] = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\lambda} e^{w\rho} \quad \text{для любого } \lambda \in X_{++}.$$

Это следует из теоремы и из коммутативности диаграммы (2) (n° 3).

Следствие 2. *Для любого* $\lambda \in X_{++}$ *и любого регулярного элемента* t *из* T

$$\chi_{\lambda}(t) = \frac{\sum_{w} \varepsilon(w)\,\lambda(wt)\,\rho(wt)}{\sum_{w} \varepsilon(w)\,\rho(wt)}, \tag{5}$$

где суммирование оба раза ведется по всем элементам w *из* W.

Действительно, функция $J(\rho)(t)$ ненулевая ввиду регулярности элемента t (формула (4)).

Если φ — центральная функция на G, то ограничение φ на T инвариантно относительно W, и, значит, $J(\rho).\varphi|T$ антиинвариантно относительно W. Кроме того, согласно *Th. spec.* и теореме 1, семейство $(\chi_{\lambda})_{\lambda \in X_{++}}$ является алгебраическим базисом пространства центральных представляющих функций на G и ортонормированным базисом пространства $ZL^2(G)$ классов центральных квадратично интегрируемых функций на G.

Из предложения 3 и теоремы 2 получаем

Следствие 3. *Отображение, которое каждой центральной непрерывной функции* φ *на* G *сопоставляет функцию* $w(G)^{-1/2} J(\rho)(\varphi|T)$, *задает изоморфизм пространства центральных представляющих функций на* G *на пространство антиинвариантных элементов в* $\Theta(T)$. *Это отображение продолжается по непрерывности до изоморфизма (гильбертовых пространств) из* $ZL^2(G)$ *на подпространство антиинвариантных элементов в* $L^2(T)$.

Следствие 4. *Пусть* φ — *центральная непрерывная функция на* G. *Тогда*

$$\int_G \overline{\chi_\lambda(g)}\,\varphi(g)\,dg=\int_T \overline{\lambda(t)}\prod_{\alpha>0}(1-\alpha(t)^{-1})\,\varphi(t)\,dt=\int_T \overline{\lambda\rho(t)}.\varphi(t)\,J(\rho)(t)\,dt.$$

Действительно, согласно лемме 4 и теореме 2,

$$\int_G \overline{\chi_\lambda(g)}\,\varphi(g)\,dg=\frac{1}{w(G)}\int_T \overline{\chi_\lambda(t)\,J(\rho)(t)}\,(\varphi(t)\,J(\rho)(t))\,dt=$$

$$=\frac{1}{w(G)}\int_T \overline{J(\lambda\rho)(t)}\,\varphi(t)\,J(\rho)(t)\,dt.$$

Но функция $t\mapsto\varphi(t)\,J(\rho)(t)$ антиинвариантна, а функция $\frac{1}{w(G)}J(\lambda\rho)$ есть ортогональная проекция $\lambda\rho$ на подпространство антиинвариантных элементов в $L^2(T)$; следовательно,

$$\frac{1}{w(G)}\int_T \overline{J(\lambda\rho)(t)}\,\varphi(t)\,J(\rho)(t)\,dt=\int_T \overline{\lambda\rho(t)}\,\varphi(t)\,J(\rho)(t)\,dt.$$

Наконец, ввиду формулы (3) имеем $\overline{\rho(t)}\,J(\rho)(t)=\prod_{\alpha>0}(1-\alpha(t)^{-1})$, чем и завершается доказательство следствия.

Замечания. 1) Для любого элемента $w\in W$ положим $\rho_w={}^w\rho/\rho$; тогда

$$\sum_w \varepsilon(w)\,\rho_w=\prod_{\alpha>0}(1-\alpha^{-1})=\rho^{-2}\prod_{\alpha>0}(\alpha-1). \qquad (6)$$

Если t — регулярный элемент в T, то из формулы (5) получаем

$$\chi_\lambda(t)=\frac{\sum_w \varepsilon(w)\,{}^w\lambda(t)\,\rho_w(t)}{\sum_w \varepsilon(w)\,\rho_w(t)}=\frac{\sum_w \varepsilon(w)\,{}^w\lambda(t)\,\rho_w(t)}{\prod_{\alpha>0}(1-\alpha(t)^{-1})}. \qquad (7)$$

Отметим, что функция ρ_w есть линейная комбинация корней с целыми коэффициентами, т. е. принадлежит $\mathrm{X}(T)$, даже если бы мы и не предполагали, что $\rho\in\mathrm{X}(T)$. Отсюда следует, что формула (7) справедлива без предположения, что $\rho\in\mathrm{X}(T)$: действительно, заменяя в доказательстве группу Ли G на соответствующую связную накрывающую, приходим к случаю следствия 2.

2) Аналогично первое равенство следствия 4 остается в силе без предположения, что $\rho\in\mathrm{X}(T)$.

3) Теорему 2 можно получить из ее инфинитезимального аналога (гл. VIII, § 9, n° 1, теорема 1); это также справедливо для теоремы 3 из следующего пункта (которая является аналогом теоремы 2 из гл. VIII, § 9, n° 2).

5. *Размерности неприводимых представлений*

Вернемся к аддитивной записи группы X (T) и не будем больше предполагать, что ρ принадлежит X (T).

Теорема 3. *Размерность пространства неприводимого представления группы Ли G со старшим весом λ задается формулой*

$$\chi_\lambda(e) = \prod_{\alpha \in R_+} \frac{\langle \lambda + \rho, K_\alpha \rangle}{\langle \rho, K_\alpha \rangle}.$$

Положим $\gamma = (1/2) \sum_{\alpha > 0} K_\alpha$, тогда $\delta(\alpha)(\gamma) = 2\pi i$ для любого простого корня α (гл. VI, § 1, n° 10, предложение 29). Прямая $\mathbf{R}\gamma$ не принадлежит ни одной гиперплоскости Ker $\delta(\alpha)$, а следовательно, exp $(z\gamma)$ — регулярный элемент в G для любого достаточно малого $z \in \mathbf{R}^*$. Для любых $\mu \in$ X (T) и $z \in \mathbf{R}$ справедливо равенство

$$J(\mu)(\exp(z\gamma)) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{z\,\delta(\mu)(w^{-1}\gamma)}.$$

Используем следующую лемму, доказательство которой приведем ниже:

Лемма 5. *Справедлива формула*

$$J(\mu)(\exp(z\gamma)) = e^{z\delta(\mu)(\gamma)} \prod_{\alpha > 0} (1 - e^{-z\delta(\mu)(K_\alpha)}).$$

Поэтому функция $J(\mu)(\exp(z\gamma))$ есть произведение функции, стремящейся к 1, когда z стремится к 0, и функции

$$z^N \prod_{\alpha > 0} \delta(\mu)(K_\alpha) = (2\pi i z)^N \prod_{\alpha > 0} \langle \mu, K_\alpha \rangle,$$

где $N = \operatorname{Card} R_+$.

Предположим сначала, что $\rho \in$ X (T); тогда, применяя следствие 2 теоремы 2, видим, что при z, стремящемся к 0, $\chi_\lambda(z\gamma)$ стремится к

$$\prod_{\alpha > 0} \langle \lambda + \rho, K_\alpha \rangle / \prod_{\alpha > 0} \langle \rho, K_\alpha \rangle;$$

в этом случае теорема доказана.

В общем случае достаточно заметить, что в доказательстве теоремы 3 всегда можно заменить группу G на подходящую связную накрывающую и свести доказательство к предыдущему случаю.

Теперь докажем лемму 5. Пусть $z \in \mathbf{C}$. Обозначим через φ_z отображение из $\mathfrak{t}$ в $\mathbf{C}$-алгебру App (X (T), $\mathbf{C}$) отображений из X (T) в $\mathbf{C}$, которые элементу $H \in \mathfrak{t}$ ставят в соответствие отображение

$$\varphi_z(H)\colon \mu \mapsto \mu(\exp zH) = e^{z\delta(\mu)(H)}.$$

Тогда $\varphi_z(H+H') = \varphi_z(H)\,\varphi_z(H')$, так что существует гомоморфизм колец

$$\psi_z\colon \mathbf{Z}[\mathrm{t}] \to \mathrm{App}(\mathrm{X}(T), \mathbf{C}),$$

такой, что $\psi_z(e^H)(\mu) = e^{z\delta(\mu)(H)}$. С другой стороны, согласно предложению 2 из гл. VI, § 3, n° 3, в $\mathbf{Z}[\mathrm{t}]$ справедливо соотношение

$$\sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, e^{w\gamma} = e^{\gamma} \prod_{\alpha > 0} (1 - e^{-K_\alpha}).$$

Применяя гомоморфизм ψ_z и принимая во внимание формулу

$$\psi_z(e^{w\gamma})(\mu) = e^{z\delta(\mu)(w\gamma)} = e^{z\,\delta(w^{-1}\mu)(\gamma)},$$

получаем доказательство искомой формулы.

Следствие 1. *Пусть* $\|\ \ \|$ — *норма в* $\mathrm{X}(T) \otimes \mathbf{R}$. *Для любого* $\lambda \in X_{++}$ *обозначим через* $d(\lambda)$ *размерность пространства неприводимого представления группы Ли* G *со старшим весом* λ.

а) *Справедливо неравенство* $\sup\limits_{\lambda \in X_{++}} d(\lambda)/\|\lambda+\rho\|^N < \infty$, *где* $N = (1/2)(\dim G - \dim T)$.

б) *Если* G *полупроста, то* $\inf\limits_{\lambda \in X_{++}} d(\lambda)/\|\lambda+\rho\| > 0$.

а) Для любого $\alpha \in R_+$ существует такое число $A_\alpha > 0$, что $|\langle \lambda + \rho, K_\alpha \rangle| \leqslant A_\alpha \|\lambda+\rho\|$, откуда $d(\lambda)/\|\lambda+\rho\|^N \leqslant \prod\limits_{\alpha>0} A_\alpha/\langle \rho, K_\alpha\rangle$.

б) Предположим, что G полупроста; обозначим через $\beta_1, \ldots, \beta_r$ простые корни и положим $N_i = K_{\beta_i}$. Тогда

$$d(\lambda) \geqslant \prod_{i=1}^{r} \frac{\langle \lambda+\rho, N_i\rangle}{\langle \rho, N_i\rangle} = \prod_{i=1}^{r} \langle \lambda+\rho, N_i\rangle;$$

так как $\langle \lambda+\rho, N_i\rangle \geqslant \langle \rho, N_i\rangle = 1$, то

$$d(\lambda) \geqslant \sup_i |\langle \lambda+\rho, N_i\rangle|.$$

Если G полупроста, то отображение $x \mapsto \sup|\langle x, N_i\rangle|$ задает норму в $\mathrm{X}(T)\otimes\mathbf{R}$, обязательно эквивалентную заданной норме, откуда вытекает б).

Следствие 2. *Предположим, что группа Ли* G *полупроста и* d.— *целое число. Тогда множество классов ее представлений размерности* $\leqslant d$ *конечно.*

Из следствия 1б) вытекает, что множество X_d элементов λ из X_{++}, таких, что $d(\lambda) \leqslant d$, конечно. Для любого λ из X_d пусть V_λ — неприводимое представление со старшим весом λ. Любое представление размерности $\leqslant d$ изоморфно прямой сумме $\bigoplus\limits_{\lambda \in X_d} V_\lambda^{n_\lambda}$ с $n_\lambda \leqslant d$, что и доказывает следствие.

6. Элементы Казимира

Согласно предложению 3 из § 1, n° 3, на $\mathfrak{g}$ существует невырожденная *отрицательная* симметрическая билинейная форма, инвариантная относительно $\mathrm{Ad}(G)$ (если G полупроста, то, например, можно взять форму Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$). Пусть F — такая форма. Напомним (гл. I, § 3, n° 7), что элементом Казимира, ассоциированным с F, называется такой элемент Γ, принадлежащий центру универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$, что для любого базиса (e_i) в $\mathfrak{g}$, удовлетворяющего условию $F(e_i, e_j) = -\delta_{ij}$, имеем $\Gamma = -\sum e_i^2$.

На протяжении этой главы *элементами Казимира* группы G будем называть элементы из $U(\mathfrak{g})$, полученные исходя из невырожденной инвариантной симметрической и *отрицательной* билинейной формы на $\mathfrak{g}$ указанным выше способом. Если Γ — элемент Казимира группы Ли G и $\tau\colon\ G \to \mathbf{GL}(V)$ — неприводимое представление этой группы Ли, то гомоморфизм Γ_V пространства V является гомотетией (*Alg.*, chap. VIII, § 3, n° 2, th. 1), коэффициент которой мы будем обозначать через $\tilde{\Gamma}(\tau)$.

Предложение 4. *Пусть* Γ — *элемент Казимира группы Ли* G.

а) *Если* τ — *неприводимое представление группы Ли* G, *то число* $\tilde{\Gamma}(\tau)$ *вещественно и неотрицательно. Если* τ *не является тривиальным представлением, то, более того,* $\tilde{\Gamma}(\tau) > 0$.

б) *Существует единственная квадратичная форма* Q_Γ *на* $\mathrm{X}(T) \otimes \mathbf{R}$, *такая, что для любого неприводимого представления* τ *группы* G *выполняется равенство*

$$\tilde{\Gamma}(\tau) = Q_\Gamma(\lambda + \rho) - Q_\Gamma(\rho),$$

где λ — *старший вес представления* τ. *Форма* Q_Γ *невырожденна, положительна и инвариантна относительно* W.

Пусть F — невырожденная отрицательная симметрическая билинейная форма на $\mathfrak{g}$, определяющая Γ. Пусть $\tau\colon G \to \mathbf{GL}(V)$ — неприводимое представление группы Ли G, и пусть $\langle\ ,\ \rangle$ — гильбертово скалярное произведение на V, инвариантное относительно G (§ 1, n° 1), и (e_i) — базис в $\mathfrak{g}$, такой, что $F(e_i, e_j) = -\delta_{ij}$. Тогда для любого элемента v из V, не инвариантного относительно G, получаем

$$\tilde{\Gamma}(\tau)\langle v, v\rangle = \langle v, \Gamma_V(v)\rangle = -\sum_i \langle v, (e_i)_V^2 v\rangle =$$
$$= \sum_i \langle v, (e_i)_V^* (e_i)_V v\rangle =$$
$$= \sum_i \langle (e_i)_V v, (e_i)_V v\rangle > 0,$$

откуда следует а).

Пусть B — форма на $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}^*$, обратная к ограничению на $\mathfrak{t}_C$ билинейной формы на $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, полученной из F расширением поля скаляров. Согласно следствию предложения 7 из гл. VIII, § 6, n° 4, имеем[1] $\tilde{\Gamma}(\tau) = B(\delta(\lambda), \delta(\lambda + 2\rho))$. Продолжим отображение $\delta: \mathrm{X}(T) \to \mathfrak{t}_{\mathbf{C}}^*$ до $\mathbf{R}$-линейного отображения из $\mathrm{X}(T) \otimes \mathbf{R}$ в $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}^*$, и пусть Q_Γ— квадратичная форма $x \mapsto B(\delta(x), \delta(x))$ на $\mathrm{X}(T) \otimes \mathbf{R}$; она невырожденна, инвариантна относительно W, и имеют место равенства

$$\tilde{\Gamma}(\tau) = B(\delta(\lambda+\rho), \delta(\lambda+\rho)) - B(\delta(\rho), \delta(\rho)) = Q_\Gamma(\lambda+\rho) - Q_\Gamma(\rho).$$

Теперь покажем, что форма Q_Γ *положительна*. Действительно, если $x \in \mathrm{X}(T) \otimes R$, то элемент $\delta(x)$ из $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}^*$ принимает чисто мнимые значения на $\mathfrak{t}$ и, стало быть, вещественные значения на $i\mathfrak{t}$. Используя неравенство $F(y, y) \geqslant 0$ для $y \in i\mathfrak{t}$, завершаем доказательство.

Нам остается доказать условие единственности из пункта б). Пусть Q — квадратичная форма на $\mathrm{X}(T) \otimes R$, удовлетворяющая требуемым условиям, и пусть Φ (соотв. Φ_Γ) — билинейная форма, ассоциированная с Q (соотв. Q_Γ). Для $\lambda, \mu \in \mathrm{X}(T)_{++}$ справедливы равенства

$$\Phi(\lambda, \mu) = (Q(\lambda+\mu+\rho) - Q(\rho)) - (Q(\lambda+\rho) - Q(\rho)) - (Q(\mu+\rho) - Q(\rho)) =$$
$$= \Phi_\Gamma(\lambda, \mu).$$

Так как $\mathrm{X}(T)_{++}$ порождает векторное $\mathbf{R}$-пространство $\mathrm{X}(T) \otimes \mathbf{R}$, то $\Phi = \Phi_\Gamma$, откуда $Q = Q_\Gamma$.

Замечание. Пусть $x \in \mathfrak{g}$. Существует такое положительное вещественное число A, что для любого неприводимого представления $\tau: G \to \mathbf{GL}(V)$ и любой гильбертовой структуры на V, инвариантной относительно G,

$$\| L(\tau)(x) \|^2 \leqslant A . \tilde{\Gamma}(\tau).$$

Действительно, используя обозначения из предыдущего доказательства, можно выбрать базис (e_i) в $\mathfrak{g}$ таким образом, что $x = ae_1$, $a \in \mathbf{R}$. Тогда для $v \in V$

$$\langle x_V v, x_V v\rangle = |a|^2 \langle e_1 v, e_1 v\rangle \leqslant |a|^2 \tilde{\Gamma}(\tau) \langle v, v\rangle.$$

[1]) Доказательство, которое там приведено для расщепляемых полупростых алгебр Ли, прямо переносится на случай расщепляемых редуктивных алгебр.

§ 8. Преобразование Фурье

Соглашения и обозначения из предыдущего параграфа сохраняются.

1. Преобразования Фурье интегрируемых функций

Напомним в этом пункте результаты и определения из *Th. spec.* [1]).

Обозначим через $\widehat{G}$ множество классов неприводимых представлений группы Ли G (в конечномерных комплексных векторных пространствах). Для любого $u \in \widehat{G}$ обозначим через E_u пространство представления u, а через $d(u)$ — его размерность. Существуют невырожденные положительные эрмитовы формы на E_u, инвариантные относительно u, и любые две такие формы пропорциональны. Обозначим через A^* (соотв. $\|A\|_\infty$) сопряжение (соотв. норму) элемента A из $\operatorname{End}(E_u)$ относительно какой-то из этих форм. Для любого $g \in G$ имеют место равенства $u(g)^* = u(g)^{-1} = u(g^{-1})$ и $\|u(g)\|_\infty = 1$; для любого $x \in \mathfrak{g}$ справедливы равенства $u(x)^* = -u(x) = u(-x)$.

Снабдим $\operatorname{End}(E_u)$ структурой гильбертова пространства, в котором скалярное произведение задается формулой

$$\langle A \mid B \rangle = d(u) \operatorname{Tr}(A^* B) = d(u) \operatorname{Tr}(B A^*), \tag{1}$$

и положим

$$\|A\|_2 = \langle A \mid A \rangle^{1/2} = (d(u) \operatorname{Tr}(A^* A))^{1/2}. \tag{2}$$

Тогда

$$\sqrt{d(u)}\, \|A\|_\infty \leqslant \|A\|_2 \leqslant d(u)\, \|A\|_\infty, \tag{3}$$

и, следовательно,

$$|\langle A \mid B \rangle| \leqslant d(u)^2\, \|A\|_\infty\, \|B\|_\infty. \tag{4}$$

Для любого $g \in G$ имеем $\|u(g)\|_2 = d(u)$.

Обозначим через $F(\widehat{G})$ алгебру $\prod_{u \in \widehat{G}} \operatorname{End}(E_u)$. Обозначим через $L^2(\widehat{G})$ гильбертову сумму гильбертовых пространств $\operatorname{End}(E_u)$; это пространство семейств $A = (A_u) \in F(\widehat{G})$, таких, что $\sum_u \|A_u\|_2^2 < \infty$, снабженное скалярным произведением

$$\langle A \mid B \rangle = \sum_{u \in \widehat{G}} \langle A_u \mid B_u \rangle = \sum_{u \in \widehat{G}} d(u) \operatorname{Tr}(A_u^* B_u). \tag{5}$$

Наконец, через $\|\ \|_2$ обозначим гильбертову норму на $L^2(\widehat{G})$, так что $\|A\|_2^2 = \sum_{u \in \widehat{G}} \|A_u\|_2^2$ для $A \in L^2(\widehat{G})$.

[1]) См. подстрочное примечание в начале § 7.

Если f — комплексная функция, интегрируемая на G, то для любого $u \in \widehat{G}$ положим

$$u(f) = \int_G f(g)\, u(g)\, dg \in \operatorname{End}(E_u). \tag{6}$$

Имеем $\|u(f)\|_\infty \leqslant \int_G |f(g)|\, dg = \|f\|_1$. *Копреобразованием Фурье* функции f называется семейство $(u(f))_{u \in \widehat{G}} \in F(\widehat{G})$, обозначаемое через $\bar{\mathscr{F}}(f)$. Если $f \in L^2(G)$, то

$$\|f\|_2^2 = \sum_{u \in \widehat{G}} \langle u(f) | u(f) \rangle = \|\bar{\mathscr{F}}(f)\|_2^2,$$

так что $\bar{\mathscr{F}}$ индуцирует изометричное линейное отображение гильбертова пространства $L^2(G)$ на гильбертово пространство $L^2(\widehat{G})$: другими словами, для f и f' из $L^2(G)$ имеем

$$\int_G \overline{f(g)}\, f'(g)\, dg = \langle \bar{\mathscr{F}}(f) \mid \bar{\mathscr{F}}(f') \rangle = \sum_{u \in \widehat{G}} d(u) \operatorname{Tr}(u(f)^* u(f')). \tag{7}$$

Определим свертку $f * f'$ двух элементов f и f' из $L^1(G)$ следующей формулой

$$(f * f')(h) = \int_G f(hg^{-1})\, f'(g)\, dg = \int_G f(g)\, f'(g^{-1}h)\, dg$$

(интеграл имеет смысл для почти всех $h \in G$).

Тогда $f * f' \in L^1(G)$ и $u(f * f') = u(f)\, u(f')$ для любого $u \in \widehat{G}$; следовательно,

$$\bar{\mathscr{F}}(f * f') = \bar{\mathscr{F}}(f) . \bar{\mathscr{F}}(f'). \tag{8}$$

Обратно, пусть $A = (A_u)_{u \in \widehat{G}}$ — элемент из $F(\widehat{G})$. Для любого $u \in \widehat{G}$ пусть $\mathscr{F}_u A$ — (аналитическая) функция на G, определяемая формулой

$$(\mathscr{F}_u A)(g) = \langle u(g) | A_u \rangle = d(u) \operatorname{Tr}(A_u\, u(g)^{-1}). \tag{9}$$

Если $A \in L^2(\widehat{G})$, то семейство $(\mathscr{F}_u A)_{u \in \widehat{G}}$ суммируемо в $L^2(G)$. Тогда *преобразованием Фурье* элемента A называется сумма этого семейства, обозначаемая через $\mathscr{F}(A)$. Отображения $\bar{\mathscr{F}}$ и $\mathscr{F}$ являются взаимно обратными изоморфизмами между гильбертовыми пространствами $L^2(G)$ и $L^2(\widehat{G})$.

Другими словами:

Предложение 1. *Любая комплексная функция f, квадратично интегрируемая на G, является суммой в гильбертовом пространстве $L^2(G)$ семейства $(f_u)_{u \in \widehat{G}}$, где для любого $h \in G$ и любого $u \in \widehat{G}$*

$$\begin{aligned} f_u(h) = \langle u(h) | u(f) \rangle = d(u) \int_G f(g) \operatorname{Tr}(u(gh^{-1}))\, dg = \\ = d(u) \int_G f(gh) \operatorname{Tr}(u(g))\, dg. \end{aligned} \tag{10}$$

Выберем для любого $u \in \widehat{G}$ ортонормированный базис B_u в E_u и через $(u_{ij}(g))$ обозначим матрицу элемента $u(g)$ в этом базисе. Предложение 1 также означает, что семейство функций $\sqrt{d(u)}\, u_{ij}$ для u из $\widehat{G}$ и i, j из B_u образует *ортонормированный базис* в пространстве $L^2(G)$.

Если f — интегрируемая функция на G, такая, что семейство (f_u) равномерно суммируемо, то сумма этого семейства есть непрерывная функция, почти всюду совпадающая с f. Другими словами, если, кроме того, предположить, что функция f непрерывна, то для любого $h \in G$

$$f(h) = \sum_{u \in \widehat{G}} d(u) \int_G f(gh)\, \mathrm{Tr}\,(u(g))\, dg. \tag{11}$$

Обратно, пусть $A \in F(\widehat{G})$; если семейство $(\mathscr{F}_u A)_{u \in \widehat{G}}$ равномерно суммируемо, то

$$g \mapsto \sum_{u \in \widehat{G}} (\mathscr{F}_u A)(g) = \sum_{u \in \widehat{G}} d(u)\, \mathrm{Tr}\,(A_u\, u(g)^{-1})$$

есть непрерывная функция на G, для которой A является копреобразованием Фурье.

Пусть f — интегрируемая функция на G, и пусть $s \in G$. Обозначим через $\gamma(s) f$ и $\delta(s) f$ функции на G, определяемые формулами $\gamma(s) f = \varepsilon_s * f$, $\delta(s) f = f * \varepsilon_{s^{-1}}$, т. е.

$$(\gamma(s) f)(g) = f(s^{-1} g), \quad (\delta(s) f)(g) = f(gs) \text{ для } g \in G$$

(гл. III, § 3, n° 4, и *Интегр.*, гл. VII, § 1, n° 1, гл. III, § 1, nn° 2, 3). Имеем

$$u(\gamma(s) f) = \int_G f(s^{-1} g)\, u(g)\, dg = \int_G f(g)\, u(sg)\, dg;$$

следовательно,

$$u(\gamma(s) f) = u(s)\, u(f), \tag{12}$$

и аналогично

$$u(\delta(s^{-1}) f) = u(f)\, u(s). \tag{13}$$

Если G коммутативна, то $\widehat{G}$ есть множество, лежащее ниже двойственной к G группы (*Спектр. теор.*, гл. II, § 1, n° 1); тогда $d(u) = 1$ для любого $u \in \widehat{G}$, и мы приходим к определениям преобразования Фурье, данным в *Спектр. теор.*, гл. II.

2. Преобразования Фурье бесконечно дифференцируемых функций

Напомним (гл. III, § 3, n° 1, определение 2), что через $U(G)$ обозначается алгебра распределений на G с носителем, содержащимся в $\{e\}$. Каноническое вложение $\mathfrak{g}$ в $U(G)$ продолжается до изоморфизма универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на $U(G)$ (*там же*, n° 7, предложение 25). В дальнейшем мы будем отождествлять эти две алгебры при

помощи указанного изоморфизма. Если f — бесконечно дифференцируемая комплексная функция на G и если $t \in U(G)$, то через $L_t f$ и $R_t f$ обозначим функции на G, определяемые формулами

$$L_t f(g) = \langle \varepsilon_g * t, f \rangle, \quad R_t f(g) = \langle t * \varepsilon_g, f \rangle$$

(см. *там же*, n° 6). Для любого $g \in G$

$$L_t \circ \gamma(g) = \gamma(g) \circ L_t, \quad R_t \circ \delta(g) = \delta(g) \circ R_t.$$

Пусть $u \in \widehat{G}$. Обозначим через E_u пространство этого представления. Морфизм групп Ли $u\colon G \to \mathbf{GL}(E_u)$ определяет при дифференцировании гомоморфизм (вещественных) алгебр Ли $\mathfrak{g} \to \operatorname{End}(E_u)$ и, стало быть, гомоморфизм алгебры $U(G)$ в алгебру $\operatorname{End}(E_u)$, также обозначаемый через u. Если $t \in U(G)$ и если f — бесконечно дифференцируемая функция на G, то

$$u(L_t f) = u(f)\, u(t^\vee), \quad u(R_t f) = u(t^\vee)\, u(f), \tag{14}$$

где через $t^\vee$ обозначается образ элемента t при главном антиавтоморфизме алгебры $U(G)$ (гл. I, § 2, n° 4); в самом деле, справедливость формул достаточно проверить для $t \in \mathfrak{g}$, а в этом случае они получаются дифференцированием из формул (12) и (13) (см. гл. III, § 3, n° 7, предложение 27).

Обозначим через $\lambda(u)$ старший вес представления $u \in \widehat{G}$ (§ 7, n° 2, теорема 1); тогда отображение $u \mapsto \lambda(u)$ есть биекция из $\widehat{G}$ на множество X_{++} доминантных весов в $X(T)$.

Пусть $\Gamma \in U(G)$ — элемент Казимира группы Ли G (§ 7, n° 6). Для любого $u \in \widehat{G}$ эндоморфизм $u(\Gamma)$ пространства E_u есть гомотетия, коэффициент которой обозначается через $\tilde{\Gamma}(u)$. Отсюда получаем отображение $u \mapsto \tilde{\Gamma}(u)$ из $\widehat{G}$ в $\mathbf{C}$.

Если φ и ψ — две вещественнозначные положительные функции на $\widehat{G}$, то через $\varphi \preccurlyeq \psi$ или $\varphi(u) \preccurlyeq \psi(u)$ обозначается отношение «существует такое $M > 0$, что $\varphi(u) \leqslant M\psi(u)$ для любого $u \in \widehat{G}$»; это есть отношение частичного порядка на множестве вещественнозначных положительных функций на $\widehat{G}$.

Предложение 2. *Пусть $m \mapsto \|m\|$ — норма в векторном* $\mathbf{R}$*-пространстве* $\mathbf{R} \otimes X(T)$ *и* Γ *— элемент Казимира группы Ли G. Пусть φ — вещественнозначная положительная функция на $\widehat{G}$.*

а) *Следующие условия эквивалентны:*

(i) *Существует такое целое число $n > 0$, что $\varphi(u) \preccurlyeq (\|\lambda(u)\| + 1)^n$* (соотв. *для любого целого числа $n > 0$ имеем $\varphi(u) \preccurlyeq (\|\lambda(u)\| + 1)^{-n}$*).

(ii) *Существует такое целое число $n > 0$, что $\varphi(u) \preccurlyeq (\tilde{\Gamma}(u) + 1)^n$* (соотв. *для любого целого числа $n > 0$ имеем $\varphi(u) \preccurlyeq (\tilde{\Gamma}(u) + 1)^{-n}$*).

б) *Если группа Ли G полупроста, то указанные выше условия* (i) *и* (ii) *эквивалентны также условию*

(iii) *Существует такое целое число $n > 0$, что $\varphi(u) \preccurlyeq d(u)^n$* (соотв. *для любого целого числа $n > 0$ имеем $\varphi(u) \preccurlyeq d(u)^{-n}$*).

Сначала заметим, что условие (i) очевидным образом не зависит от выбранной нормы. Значит, в качестве нормы можно взять норму, определяемую квадратичной формой Q_Γ, ассоциированной с Γ (§ 7, n° 6, предложение 4). Тогда

$$0 \leqslant \tilde{\Gamma}(u) = \|\lambda(u)+\rho\|^2 - \|\rho\|^2,$$

и, следовательно, $\tilde{\Gamma}(u)+1 \leqslant (\|\lambda(u)\|+1)^2 \leqslant \tilde{\Gamma}(u)+1$, откуда вытекает а).

Кроме того, если G полупроста, то (§ 7, n° 5, следствие 1 теоремы 3)

$$\|\lambda(u)+\rho\| \leqslant d(u) \leqslant \|\lambda(u)+\rho\|^N, \text{ где } N=(1/2)(\dim G - \dim T),$$

поэтому $\|\lambda(u)\|+1 \leqslant d(u) \leqslant (\|\lambda(u)\|+1)^N$, откуда следует б).

Из предложения 2 вытекает, что условие (i) не зависит от выбора максимального тора, камеры и нормы, а условие (ii) не зависит от выбора элемента Казимира. Функция, удовлетворяющая условиям (i) и (ii), называется функцией *умеренного роста* (соотв. *быстро убывающей* функцией). Произведение двух функций умеренного роста есть функция умеренного роста; произведение функции умеренного роста на быстро убывающую функцию есть быстро убывающая функция. Если φ — быстро убывающая функция, то семейство $(\varphi(u))_{u \in \hat{G}}$ суммируемо.

Примеры. Функция $u \mapsto d(u)$ — функция умеренного роста (§ 7, n° 5, следствие 1 теоремы 3); для любой нормы $\| \ \|$ на $\mathbf{R} \otimes X(T)$ функция $u \mapsto \|\lambda(u)\|$ также функция умеренного роста. Для любого элемента Казимира Γ функция $u \mapsto \tilde{\Gamma}(u)$ — функция умеренного роста; или более общо:

Предложение 3. *Для любого $t \in U(G)$ функции $u \mapsto \|u(t)\|_\infty$ и $u \mapsto \|u(t)\|_2$ — функции умеренного роста на $\hat{G}$.*

Поскольку произведение двух функций умеренного роста есть функция умеренного роста, то предложение достаточно доказать для $t \in \mathfrak{g}$. В этом случае утверждение вытекает из замечания из § 7, n° 6, и из неравенства

$$\|u(t)\|_2 \leqslant d(u)\|u(t)\|_\infty.$$

Теорема 1. а) *Пусть f — бесконечно дифференцируемая комплексная функция на G. Тогда семейство $(f_u)_{u \in \hat{G}}$, где $f_u(g) = \langle u(g) | u(f) \rangle$, равномерно суммируемо на G, и для любого $h \in G$*

$$f(h) = \sum_{u \in \hat{G}} \langle u(h) | u(f) \rangle = \sum_{u \in \hat{G}} d(u) \int_G f(g) \operatorname{Tr}(u(gh^{-1}))\, dg.$$

б) *Пусть f — интегрируемая функция на G. Для того чтобы она почти всюду совпадала с некоторой бесконечно дифференцируемой функцией, необходимо и достаточно, чтобы функция $u \mapsto \|u(f)\|_\infty$ была быстро убывающей на $\hat{G}$.*

Пусть f — бесконечно дифференцируемая функция на G, и пусть Γ — элемент Казимира для G. Согласно формуле (14), для любого целого числа $n \geqslant 0$ справедливо равенство

$$\tilde{\Gamma}(u)^n\, u(f) = u(f)\, u(\Gamma)^n = u((L_\Gamma)^n f),$$

и как следствие получаем

$$\tilde{\Gamma}(u)^n \|u(f)\|_\infty \leqslant \|(L_\Gamma)^n f\|_1 \leqslant \sup_{g\in G} |((L_\Gamma)^n f)(g)|; \tag{15}$$

таким образом, функция $u \mapsto \|u(f)\|_\infty$ — быстро убывающая функция.

Обратно, пусть $A = (A_u)_{u\in\widehat{G}}$ — элемент из $F(\widehat{G})$, такой, что $u \mapsto \|A_u\|_\infty$ — быстро убывающая функция. Положим $f_u(g) = \langle u(g) | A_u \rangle$; тогда $g \mapsto f_u(g)$ — аналитическая и, следовательно, бесконечно дифференцируемая функция. Для любого $x \in \mathfrak{g}$, согласно предложению 27 из гл. III, § 3, n° 7,

$$(L_x f_u)(g) = \langle u(g)\, u(x) | A_u \rangle.$$

Пусть $t \in U(G)$; тогда из предыдущей формулы получаем

$$(L_t f_u)(g) = \langle u(g)\, u(t) | A_u \rangle,$$

и, значит,

$$|(L_t f_u)(g)| = |\langle u(g)\, u(t) | A_u \rangle| \leqslant d(u)^2 \|u(t)\|_\infty \|u(g)\|_\infty \|A_u\|_\infty = \\ = d(u)^2 \|u(t)\|_\infty \|A_u\|_\infty.$$

Тогда $u \mapsto \sup\limits_g |(L_t f_u)(g)|$ — быстро убывающая функция, поскольку $d(u)$ и $\|u(t)\|_\infty$ — функции умеренного роста (предложение 3), а $\|A_u\|_\infty$ — быстро убывающая функция; стало быть, семейство $(L_t f_u)_{u\in\widehat{G}}$ равномерно суммируемо. Отсюда получаем [1], что сумма семейства (f_u) есть бесконечно дифференцируемая функция на G, копреобразование Фурье которой есть семейство (A_u), чем завершается доказательство теоремы.

Обозначим через $\mathscr{S}(\widehat{G})$ векторное подпространство в $L^2(\widehat{G})$, состоящее из таких семейств $A = (A_u)_{u\in\widehat{G}}$, что функция $u \mapsto \|A_u\|_\infty$ — быстро убывающая функция на $\widehat{G}$. Из теоремы 1 вытекает, что отображения $\bar{\mathscr{F}}: f \mapsto (u(f))_{u\in\widehat{G}}$ и $\mathscr{F}: A \mapsto \sum\limits_{u\in\widehat{G}} \langle u(g) | A_u \rangle$ индуцируют взаимно обратные изоморфизмы между комплексными векторными пространствами $\mathscr{C}^\infty(G; \mathbf{C})$ и $\mathscr{S}(\widehat{G})$. Снабдим пространство $\mathscr{C}^\infty(G; \mathbf{C})$ топологией C^∞-равномерной сходимости (§ 6, n° 4), которая может быть определена при помощи семейства полунорм $f \mapsto \sup\limits_{g\in G} |L_t f(g)|$ для $t \in U(G)$, а пространство $\mathscr{S}(\widehat{G})$ — топологией, определяемой последовательностью полунорм p_n: $A \mapsto \sup\limits_{u\in\widehat{G}} (\tilde{\Gamma}(u) + 1)^n \|A_u\|_\infty$. Из формулы (15) в предыдущем доказательстве вытекает, что отображение $\bar{\mathscr{F}}$ непрерывно. Пусть $t \in U(G)$, и пусть $A = (A_u)_{u\in\widehat{G}}$ — элемент из $\mathscr{S}(\widehat{G})$; положим $f_u(g) = \langle u(g) | A_u \rangle$.

---

[1] Это следует из того, что пространство $\mathscr{C}^\infty(G; \mathbf{C})$, снабженное топологией C^∞-равномерной сходимости (§ 6, n° 4), *полно.*

Пусть p — такое целое число, что $\sum\limits_{u\in\widehat{G}} \tilde{\Gamma}(u)^{-p}=M<\infty$. Из предыдущего доказательства следует, что существует такое целое число m, что для любого $g\in G$

$$|(L_t f_u)(g)|\leqslant d(u)^2\|u(t)\|_\infty\|A_u\|_\infty\leqslant m.(1+\tilde{\Gamma}(u))^m\,\tilde{\Gamma}(u)^{-p}\,\|A_u\|_\infty,$$

откуда $|(L_t\,\mathscr{F}(A))(g)|\leqslant m\,Mp_m(A)$; это доказывает непрерывность отображения $\mathscr{F}$. Отсюда вытекает

Следствие. *Отображения* $\bar{\mathscr{F}}\colon f\mapsto(u(f))_{u\in\widehat{G}}$ *и* $\mathscr{F}\colon A\mapsto\sum\limits_{u\in\widehat{G}}\langle u(g)|A_u\rangle$ *индуцируют взаимно обратные изоморфизмы между топологическими векторными пространствами* $\mathscr{C}^\infty(G;\mathbf{C})$ *и* $\mathscr{S}(\widehat{G})$.

3. Преобразования Фурье центральных функций

Для любого $u\in\widehat{G}$ обозначим через χ_u *характер* представления u; тогда

$$\chi_u(g)=\mathrm{Tr}(u(g))\quad(g\in G).\tag{16}$$

Напомним (*Th. spec.*) формулы

$$\chi_u*\chi_v=0\quad(u,v\in\widehat{G},\ u\neq v),\tag{17}$$

$$\chi_u*\chi_u=\frac{1}{d(u)}\chi_u\quad(u\in\widehat{G}).\tag{18}$$

Для любого $u\in\widehat{G}$ обозначим через ε_u тождественное отображение пространства E_u. Напомним (§ 7, n° 4), что через $ZL^2(G)$ обозначается подпространство в $L^2(G)$, состоящее из классов центральных функций, т. е. таких функций f, что $f\circ\mathrm{Int}\,s=f$ для любого $s\in G$, или, что эквивалентно, $\gamma(s)f=\delta(s^{-1})f$ для любого $s\in G$.

Предложение 4. *Пусть* $f\in L^2(G)$. *Для того чтобы функция* f *была центральной, необходимо и достаточно, чтобы отображение* $u(f)$ *было гомотетией для любого* $u\in\widehat{G}$. *Тогда*

$$u(f)=\frac{\varepsilon_u}{d(u)}\int_G f(g)\chi_u(g)\,dg.\tag{19}$$

Согласно предложению 1 (n° 1), условие, что функция f центральна, равносильно условию $u(\gamma(s)f)=u(\delta(s^{-1})f)$ для любого $s\in G$ и любого $u\in\widehat{G}$, но это условие также записывается в виде $u(s)\,u(f)=u(f)\,u(s)$ для любого $s\in G$ и любого $u\in\widehat{G}$ (формулы (12) и (13)), откуда получаем первое утверждение предложения 4 (лемма Шура). Если отображение $u(f)$ — гомотетия, то $u(f)=\lambda_u\,\varepsilon_u$, где

$$\lambda_u=\frac{1}{d(u)}\mathrm{Tr}(u(f))=\frac{1}{d(u)}\int_G f(g)\,\mathrm{Tr}(u(g))\,dg=\frac{1}{d(u)}\int_G f(g)\chi_u(g)\,dg.$$

В качестве следствия для любой функции $f \in ZL^2(G)$ получаем

$$u(f) = \langle \bar{\chi}_u | f \rangle = \frac{\varepsilon_u}{d(u)}, \tag{20}$$

а значит,

$$\bar{\mathscr{F}}(f) = \left(\langle \bar{\chi}_u | f \rangle \frac{\varepsilon_u}{d(u)} \right)_{u \in \widehat{G}}, \tag{21}$$

причем

$$\| \bar{\mathscr{F}}(f) \|_2^2 = \sum_u \left\| \langle \bar{\chi}_u | f \rangle \frac{\varepsilon_u}{d(u)} \right\|_2^2 = \sum_u | \langle \bar{\chi}_u | f \rangle |^2.$$

Обратно, если φ — квадратично интегрируемая комплексная функция на $\widehat{G}$, то элемент $\left(\frac{\varphi(u)}{d(u)} \varepsilon_u \right)_{u \in \widehat{G}}$ из $F(\widehat{G})$ принадлежит пространству $L^2(\widehat{G})$ и (формула (9))

$$\left(\mathscr{F}_u \left(\frac{\varphi(u)}{d(u)} \varepsilon_u \right) \right)(g) = d(u) \operatorname{Tr} \left(\frac{\varphi(u)}{d(u)} \varepsilon_u u(g)^{-1} \right) = \varphi(u) \bar{\chi}_u(g),$$

откуда

$$\mathscr{F}\left(\left(\frac{\varphi(u)}{d(u)} \varepsilon_u \right) \right) = \sum_{u \in \widehat{G}} \varphi(u) \bar{\chi}_u. \tag{22}$$

Отметим, что из формул (20) и (21), в частности, получается для u, v из $\widehat{G}$

$$u(\bar{\chi}_v) = 0, \quad \text{если} \quad u \neq v, \tag{23}$$

$$u(\bar{\chi}_u) = \frac{\varepsilon_u}{d(u)} \in \operatorname{End}(E_u), \tag{24}$$

$$\bar{\mathscr{F}}(\chi_u) = \frac{\varepsilon_u}{d(u)} \in \operatorname{End}(E_u) \subset F(\widehat{G})\ ^{1)}. \tag{25}$$

Предложение 5. *Пусть f — непрерывная центральная функция на G. Для того чтобы она была бесконечно дифференцируемой, необходимо и достаточно, чтобы $u \mapsto |\langle \chi_u | f \rangle|$ была быстро убывающей функцией на $\widehat{G}$; тогда для любого $g \in G$*

$$f(g) = \sum_{u \in \widehat{G}} \langle \chi_u | f \rangle \chi_u(g).$$

---

[1]) Вложим пространство $\operatorname{End}(E_u)$ в произведение $F(\widehat{G}) = \prod_{v \in \widehat{G}} \operatorname{End}(E_v)$, поставив в соответствие элементу $A \in \operatorname{End}(E_u)$ семейство $(A_v)_{v \in \widehat{G}}$, где $A_u = A$ и $A_v = 0$ для $v \neq u$.

Согласно теореме 1б), функция $\bar{f}$ бесконечно дифференцируема тогда и только тогда, когда функция $u \mapsto \|u(\bar{f})\|_\infty$ является быстро убывающей, но, согласно формуле (20),

$$\|u(\bar{f})\|_\infty = \frac{1}{d(u)} |\langle \chi_u | f \rangle|,$$

откуда получаем первое утверждение, поскольку $d(u)$ и $1/d(u)$ — функции умеренного роста.

Теперь предположим, что функция f бесконечно дифференцируема; тогда, согласно теореме 1а), $f(g) = \sum\limits_{u \in \widehat{G}} f_u(g)$ для любого $g \in G$, где

$$\begin{aligned} f_u(g) &= \langle u(g) | u(f) \rangle = d(u) \operatorname{Tr}(u(g)^{-1} . u(f)) = \\ &= d(u) \operatorname{Tr}\left(u(g)^{-1} \langle \bar{\chi}_u | f \rangle \frac{\varepsilon_u}{d(u)} \right) = \langle \bar{\chi}_u | f \rangle \operatorname{Tr}(u(g)^{-1}) = \\ &= \langle \bar{\chi}_u | f \rangle \bar{\chi}_u(g). \end{aligned}$$

Итак, $f(g) = \sum\limits_{u \in \widehat{G}} \langle \bar{\chi}_u | f \rangle \bar{\chi}_u(g)$, но при любом $u \in \widehat{G}$ для контрагредиентного к u представления u' выполняется условие $\bar{\chi}_u = \chi_{u'}$ и отображение $u \mapsto u'$ является перестановкой в $\widehat{G}$, поэтому $f(g) = \sum\limits_{u \in \widehat{G}} \langle \chi_u | f \rangle \chi_u(g)$, чем завершается доказательство предложения.

Следствие. *Пусть f — непрерывная центральная функция на G. Для того чтобы она была бесконечно дифференцируемой, необходимо и достаточно, чтобы ее ограничение на T было бесконечно дифференцируемо.*

Действительно, согласно следствию 4 из § 7, n° 4,

$$\langle \chi_u | f \rangle = \int\limits_G \overline{\lambda(u)(t)}\, \varphi(t)\, dt, \text{ где } \varphi(t) = \prod_{\alpha > 0} (1 - \alpha(t)^{-1}) f(t).$$

Если функция $f | T$ бесконечно дифференцируема, то φ также бесконечно дифференцируема. Тогда из предложения 5, примененного к группе T, получаем, что $\mu \mapsto \int\limits_T \overline{\mu(t)}\, \varphi(t)\, dt$ на $\widehat{T} = \mathrm{X}(T)$ — функция умеренного роста и $u \mapsto \langle \chi_u | f \rangle$ также функция умеренного роста; таким образом, функция f бесконечно дифференцируема (предложение 5). Обратное очевидно.

4. Центральные функции на G и функции на T

Обозначим через $\mathscr{C}(G)$ пространство комплексных непрерывных функций на G, а через $\mathscr{C}^\infty(G)$ — подпространство бесконечно дифференцируемых функций. Тогда имеет место последовательность включений

$$\Theta(G) \subset \mathscr{C}^\infty(G) \subset \mathscr{C}(G) \subset L^2(G).$$

Обозначим соответственно через $Z\Theta(G)$, $Z\mathscr{C}^\infty(G)$, $Z\mathscr{C}(G)$, $ZL^2(G)$ подпространства, состоящие из центральных функций в этих пространствах. Аналогично введем пространства $\Theta(T)$, $\mathscr{C}^\infty(T)$, $\mathscr{C}(T)$ и $L^2(T)$. Для любого пространства E из этого набора обозначим через E^W (соотв. E^{-W}) подпространство, состоящее из инвариантных (соотв. антиинвариантных) элементов относительно действия группы W. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
Z\mathscr{C}(G) & \xrightarrow{a_c} & \mathscr{C}(T)^W \\
\uparrow & & \uparrow \\
Z\mathscr{C}^\infty(G) & \xrightarrow{a_\infty} & \mathscr{C}^\infty(T)^W \\
\uparrow & & \uparrow \\
Z\Theta(G) & \xrightarrow{a_\Theta} & \Theta(T)^W
\end{array}$$

где вертикальные стрелки обозначают канонические вложения, а отображения a_c, a_∞, a_Θ порождены отображением ограничения из $\mathscr{C}(G)$ в $\mathscr{C}(T)$.

Отображения a_c, a_∞, a_Θ *биективны* (§ 2, n° 5, следствие 1 предложения 5, § 8, n° 3, следствие предложения 5, и § 7, n° 3, следствие предложения 2).

Предположим теперь, что полусумма ρ положительных корней принадлежит $X(T)$, и рассмотрим отображение b, которое каждой непрерывной функции φ на T ставит в соответствие $\varphi.J(\rho)$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
ZL^2(G) & & \xrightarrow{\quad u \quad} & & L^2(T)^{-W} \\
\uparrow & & & & \uparrow \\
Z\mathscr{C}(G) & \xrightarrow{a_c} & \mathscr{C}(T)^W & \xrightarrow{b_c} & \mathscr{C}(T)^{-W} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
Z\mathscr{C}^\infty(G) & \xrightarrow{a_\infty} & \mathscr{C}^\infty(T)^W & \xrightarrow{b_\infty} & \mathscr{C}^\infty(T)^{-W} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
Z\Theta(G) & \xrightarrow{a_\Theta} & \Theta(T)^W & \xrightarrow{b_\Theta} & \Theta(T)^{-W}
\end{array}$$

где вертикальные стрелки обозначают канонические вложения, отображения b_c, b_∞, b_Θ порождены отображением b, а отображение u продолжает $b_c \circ a_c$ по непрерывности (§ 7, n° 4, следствие 3 теоремы 2). Отображения u и b_Θ *биективны (там же); b_∞* также *биективно* (упражнение 5); напротив, b_c в общем случае не сюръективно (упражнение 6).

§ 9. Действия компактных групп Ли на многообразиях

В этом параграфе через X обозначается локально конечномерное отделимое вещественное многообразие класса C^r $(1 \leqslant r \leqslant \omega)$.

1. Погружение многообразия в окрестности компактного подмножества

Лемма 1. *Пусть T и T' — два топологических пространства, A и A' — компактные подмножества соответственно в T и T' и W — окрестность множества $A\times A'$ в $T\times T'$. Существуют открытая окрестность U множества A в T и открытая окрестность U' множества A' в T', такие, что $U\times U'\subset W$.*

Пусть $x\in A$; существуют такие открытые множества U_x в T и U'_x в T', что $\{x\}\times A'\subset U_x\times U'_x\subset W$: действительно, компактное подмножество $\{x\}\times A'$ в $T\times T'$ можно покрыть конечным числом открытых множеств, содержащихся в W, вида $U_i\times U'_i$, где $x\in U_i$; теперь достаточно положить $U_x=\bigcap\limits_i U_i$ и $U'_x=\bigcup\limits_i U'_i$.

Поскольку A компактно, то существуют такие точки $x_1, \ldots, x_m$ в A, что $A\subset\bigcup\limits_i U_{x_i}$; положим $U=\bigcup\limits_i U_{x_i}$ и $U'=\bigcap\limits_i U'_{x_i}$. Тогда $A\times A'\subset U\times U'\subset W$, что завершает доказательство леммы.

На протяжении этого параграфа через Y обозначается отделимое многообразие класса C^r.

Предложение 1. *Пусть $\varphi: X\to Y$ —* морфизм *класса C^r и A — компактное подмножество в X. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *Ограничение φ на A инъективно и φ — иммерсия во всех точках множества A*;

(ii) *существует открытая окрестность U множества A, такая, что φ индуцирует погружение окрестности U в Y.*

Если эти условия выполнены, то говорят, что φ есть *погружение в окрестности подмножества A.*

Докажем, что (i) влечет за собой (ii); обратное утверждение очевидно. Пусть (i) выполнено; тогда существует открытое множество V в X, содержащее A и такое, что ограничение φ на V есть иммерсия (*Мн., Св. рез.*, 5.7.1). Обозначим через Γ такое множество точек (x, y) в $V\times V$, что $\varphi(x)=\varphi(y)$, и пусть Δ — диагональ в $V\times V$. Тогда Δ — открытое подмножество в Γ: действительно, для любого $x\in V$ существует окрестность U_x точки x, такая, что ограничение φ на U_x инъективно, т. е. $\Gamma\cap(U_x\times U_x)=\Delta\cap(U_x\times U_x)$.

Поскольку Y отделимо, множество Γ замкнуто в $V\times V$; следовательно, дополнение W множества $\Gamma-\Delta$ в $V\times V$ открыто. Согласно предположению, W содержит $A\times A$; из леммы 1 следует, что существует открытое множество U' в V, содержащее A и такое, что $U'\times U'\subset W$, т. е. такое, что ограничение φ на U' инъективно. Кроме того, существует открытая окрестность U множества A, такая, что ее замыкание содержится в U' (*Общ. топ.*, 1968, гл. I, § 9, n° 7, предложение 10). Тогда φ индуцирует гомеоморфизм

из $\bar{U}$ на $\varphi(\bar{U})$ и, следовательно, из U на $\varphi(U)$, откуда вытекает, что ограничение φ на U есть погружение (*Мн., Св. рез.*, 5.8.3).

Предложение 2. *Предположим, что многообразие Y паракомпактно. Пусть A — подмножество в X, и пусть $\varphi: X \to Y$ — морфизм класса C^r, задающий гомеоморфизм из A на $\varphi(A)$ и этальный во всех точках множества A. Тогда существует такая открытая окрестность U множества A, что φ задает изоморфизм множества U на открытое подмногообразие в Y.*

Уменьшая в случае необходимости X и Y, можно предполагать, что морфизм φ этален и сюръективен. Обозначим через $\sigma: \varphi(A) \to A$ гомеоморфизм, обратный к $\varphi|A$. Поскольку многообразие Y метризуемо (*Мн., Св. рез.*, 5.1.6), $\varphi(A)$ допускает фундаментальную систему паракомпактных окрестностей; тогда, согласно *Top. gen.*, chap. XI, существуют открытая окрестность V множества $\varphi(A)$ в Y и непрерывное отображение $s: V \to X$, совпадающее с σ на $\varphi(A)$, такие, что $\varphi(s(y)) = y$ для любого $y \in V$. Кроме того, отображение s топологически этально; следовательно, $s(V)$ является открытым множеством U, содержащим A. Тогда φ задает гомеоморфизм φ' из U на V. Согласно *Мн., Св. рез.*, 5.7.8, φ' — изоморфизм.

На протяжении этого пункта будем предполагать, что $r \neq \omega$.

Предложение 3. *Пусть A — компактное подмножество в X. Множество $\mathscr{P}$ морфизмов $\varphi \in \mathscr{C}^r(X; Y)$, являющихся погружениями в окрестности подмножества A, открыто в $\mathscr{C}^r(X; Y)$ в топологии компактной C^r-сходимости* (§ 6, n° 4).

Очевидно, что предложение достаточно доказать для $r = 1$.

а) Покажем сначала, что подмножество J в $\mathscr{C}^1(X; Y)$, состоящее из морфизмов, являющихся иммерсиями во всех точках множества A, открыто. Рассмотрим отображение $j_A: \mathscr{C}^1(X; Y) \times A \to J^1(X, Y)$, такое, что $j_A(\varphi, x) = j^1_x(\varphi)$ (*Мн., Св. рез.*, 12.1).

По определению топологии в $\mathscr{C}^1(X; Y)$ отображение $\tilde{j}_A: \varphi \mapsto j_A(\varphi, .)$ из $\mathscr{C}^1(X; Y)$ в $\mathscr{C}(A; J^1(X, Y))$ непрерывно; тогда из *Общ. топ.*, гл. X, § 3, n° 4, теорема 3, следует, что отображение j_A непрерывно.

С другой стороны, пусть M — множество струй j из $J^1(X, Y)$, для которых касательное отображение $T(j): T_{\mathrm{s}(j)}(X) \to T_{\mathrm{b}(j)}(Y)$ (*Мн., Св. рез.*, 12.3.4) инъективно. Множество M открыто в $J^1(X, Y)$: действительно, достаточно проверить это утверждение для случая, когда X — открытое подмножество конечномерного векторного пространства $\widehat{E}$, а Y — открытое подмножество банахова пространства F, т. е. (*Мн., Св. рез.*, 12.3.1) доказать, что множество инъективных непрерывных линейных отображений открыто в $\mathscr{L}(E, F)$, а это следует из предложения 16 из *Th. spec.*, chap. III, § 2, n° 7.

Из сказанного выше вытекает, что множество $j_A^{-1}(M)$ открыто в $\mathscr{C}^1(X; Y) \times A$; стало быть, его дополнение $\mathscr{F}$ замкнуто. Поскольку A компактно, проекция $\mathrm{pr}_1: \mathscr{C}^1(X; Y) \times A \to \mathscr{C}^1(X; Y)$ является собственным и,

следовательно, замкнутым морфизмом. Тогда множество J, совпадающее с $\mathscr{C}^1(X; Y) - \mathrm{pr}_1(\mathscr{F})$, открыто в $\mathscr{C}^1(X; Y)$.

б) Пусть H — подмножество в $J \times A \times A$, состоящее из таких элементов (f, x, y), что $f(x) = f(y)$. Ясно, что H содержит $J \times \Delta$, где Δ обозначает диагональ в произведении $A \times A$. Покажем, что множество $H' = H - (J \times \Delta)$ *замкнуто* в $J \times A \times A$. Так как $\mathscr{F}$ есть дополнение в J к образу множества H' при собственной проекции $\mathrm{pr}_1: J \times A \times A \to J$, то отсюда будет следовать доказываемое предложение.

Топология в $\mathscr{C}^1(X; Y)$ тоньше топологии компактной сходимости; поэтому отображение $(\varphi, x) \mapsto \varphi(x)$ из $\mathscr{C}^1(X; Y) \times A$ в Y непрерывно (*Общ. топ.*, гл. X, § 3, n° 4, следствие 1); отсюда получаем, что H замкнуто в $J \times A \times A$. Тем самым достаточно показать, что $J \times \Delta$ открыто в H или, другими словами, что для любого $\varphi \in J$ и любого $x \in A$ существуют окрестность Ω точки φ в J и окрестность B точки x в X, такие, что для любого морфизма ψ из Ω ограничение ψ на $A \cap B$ *инъективно.*

Таким образом, предложение вытекает из следующей леммы:

Лемма 2. *Пусть x — точки многообразия X и $\varphi: X \to Y$ — морфизм класса C^1, являющийся иммерсией в точке x. Существуют окрестность Ω точки φ в $\mathscr{C}^1(X; Y)$ и окрестность B точки x в X, такие, что для любого $\psi \in \Omega$ ограничение ψ на B инъективно.*

Пусть U — относительно компактная открытая окрестность точки x, изоморфная конечномерному векторному пространству и такая, что $\varphi(\bar{U})$ содержится в области определения карты V. Множество Ω_0 морфизмов $\psi \in \mathscr{C}^1(X; Y)$, таких, что $\psi(\bar{U}) \subset V$, открыто в $\mathscr{C}^1(X; Y)$, а отображение ограничения $\Omega_0 \to \mathscr{C}^1(U; V)$ непрерывно; тем самым мы свели доказательство леммы к случаю $X = U$ и $Y = V$, т. е. с самого начала можно предполагать, что X — конечномерное векторное пространство, а Y — банахово пространство. Выберем нормы в пространствах X и Y.

Линейное отображение $D\varphi(x): X \to Y$ инъективно; пусть q — его конорма (*Th. spec.*, chap. III, § 2, n° 6). Тогда по определению конормы $\|D\varphi(x).t\| \geqslant q\|t\|$ для любого $t \in X$. Пусть $\varepsilon \in \mathbf{R}$ таково, что $0 < \varepsilon < q/2$, и пусть B — такой замкнутый шар с центром в x, что $\|D\varphi(u) - D\varphi(x)\| \leqslant \varepsilon$ для любого $u \in B$. Обозначим через Ω подмножество в $\mathscr{C}^1(X; Y)$, состоящее из таких морфизмов ψ, что $\|D\psi(u) - D\varphi(u)\| \leqslant \varepsilon$ для любого $u \in B$; оно открыто по определению топологии в $\mathscr{C}^1(X; Y)$. Для $\psi \in \Omega$ положим $\psi_0 = \psi - D\varphi(x)$. Имеем $\|D\psi_0(u)\| \leqslant 2\varepsilon$ для любого $u \in B$, и, стало быть, $\|\psi_0(u) - \psi_0(v)\| \leqslant 2\varepsilon\|u - v\|$ для произвольных u и v из B (*Мн., Св. рез.*, 2.2.3). Отсюда получаем

$$\|\psi(u) - \psi(v)\| \geqslant \|D\varphi(x).(u - v)\| - \|\psi_0(u) - \psi_0(v)\| \geqslant (q - 2\varepsilon)\|u - v\|.$$

Следовательно, ограничение ψ на B инъективно, и лемма доказана.

Предложение 4. *Пусть A — компактное подмножество в X. Существуют конечномерное векторное пространство E и морфизм $\varphi \in \mathscr{C}^r(X; E)$ ($r \neq \omega$), являющийся погружением в окрестности подмножества A.*

Пусть $(U_i, \varphi_i, E_i)_{i\in I}$ — конечное семейство таких карт на X, что их области определения покрывают A. Можно продолжить φ_i до отображения из X в E_i (также обозначаемого через φ_i), полагая $\varphi_i(x)=0$ для $x\notin U_i$. Пусть $(V_i)_{i\in I}$ — покрытие множества A открытыми множествами из X, такими, что $\bar{V}_i\subset U_i$ для всех $i\in I$ (существование такого покрытия вытекает из следствия 1 из *Top. gen.*, chap. IX, p. 48 [1]), примененного к компактному пространству X', полученному из X присоединением бесконечно удаленной точки, и к покрытию пространства X' открытыми множествами U_i $(i\in I)$ и $X'-A$). Для любого $i\in I$ пусть α_i — числовая функция на X класса C^r, равная 1 во всех точках множества V_i и с носителем, содержащимся в U_i (*Мн., Св. рез.*, 5.3.6).

Рассмотрим отображение $\varphi\colon X\to\bigoplus_{i\in I}(E_i\oplus\mathbf{R})$, определяемое формулой

$$\varphi(x)=(\alpha_i(x)\,\varphi_i(x),\ \alpha_i(x))_{i\in I}.$$

Для любого $i\in I$ отображение $\alpha_i\varphi_i$ принадлежит классу C^r (поскольку его ограничения на V_i и на дополнение к носителю α_i принадлежит классу C^r), а его ограничение на V_i есть погружение. Отсюда следует, что φ — морфизм класса C^r, являющийся иммерсией во всех точках множества A. Покажем, что ограничение φ на A инъективно. Пусть x, y — такие две точки из A, что $\varphi(x)=\varphi(y)$, и пусть $i\in I$ — такой индекс, для которого $x\in V_i$. Тогда $\alpha_i(x)=1$, и, стало быть, $\alpha_i(y)=1$, что влечет за собой $y\in U_i$; но, кроме того, $\varphi_i(x)=\varphi_i(y)$, откуда $x=y$ ввиду того, что φ_i индуцирует погружение множества U_i в E_i.

Можно доказать [2]), что любое отделимое счетное в бесконечности чистое многообразие размерности n можно погрузить в $\mathbf{R}^{2n}$; менее сильный результат см. в упражнении 2.

2. Теорема об эквивариантном погружении

В этом пункте предполагается, что $r\neq\omega$.

Лемма 3. *Пусть G — компактная топологическая группа, непрерывно действующая на топологическом пространстве X, A — подмножество в X, устойчивое относительно G, и W — окрестность подмножества A. Тогда существует открытая окрестность V подмножества A, устойчивая относительно G и содержащаяся в W.*

Положим $F=X-\mathring{W}$ [3]) и $V=X-GF$. Тогда множество V открыто (*Общ. топ.*, 1969, гл. III, § 4, n° 1, следствие 1), устойчиво относительно G и $A\subset V\subset W$.

Теорема 1. *Пусть G — компактная группа Ли, $(g, x)\mapsto gx$ — закон левого действия класса C^r группы G на X и A — компактное подмножество*

---

[1]) См. также *Общ. топ.*, 1975, гл. IX, § 4, n° 3.— *Прим. перев.*

[2]) См. Whitney H. The self-intersection of a smooth n-manifold in $2n$-space. Ann. of Math., v. 45, 1944, p. 220—246.

[3]) $\mathring{W}$ — внутренность множества W, см. *Общ. топ.*, 1968, гл. I, § 1, n° 6.— *Прим. перев.*

в X. Существуют аналитическое линейное представление ρ группы G в конечномерном векторном пространстве E, морфизм $\varphi\colon X \to E$ класса C^r, согласованный с действием группы G, и открытая окрестность U подмножества A, устойчивая относительно действия группы G, такие, что ограничение φ на U есть погружение.

Заменяя A на компактное подмножество GA, мы приходим к случаю, когда A устойчиво относительно G.

Пусть E_0 — такое конечномерное векторное пространство, что существует элемент из $\mathscr{C}^r(X; E_0)$, являющийся погружением в окрестности множества A (n° 1, предложение 4); тогда множество $\mathscr{P}$ морфизмов, обладающих этим свойством, открыто и непусто в $\mathscr{C}^r(X; E_0)$ (n° 1, предложение 3). Рассмотрим непрерывное линейное представление компактной группы G в пространстве $\mathscr{C}^r(X; E_0)$ (§ 6, n° 4, лемма 4). Согласно теореме Петера — Вейля (*Th. spec.*), объединение конечномерных подпространств, устойчивых относительно G, плотно в $\mathscr{C}^r(X; E_0)$. Тогда существует такой элемент φ_0 из $\mathscr{P}$, что отображения $x \mapsto \varphi_0(gx)$ для всех $g \in G$ порождают *конечномерное* векторное подпространство E_1 в $\mathscr{C}^r(X; E_0)$, которое очевидным образом устойчиво относительно действия группы G.

Возьмем в качестве E пространство $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(E_1, E_0)$, в качестве ρ представление группы G в пространстве E, индуцированное действием G на E_1, и в качестве $\varphi\colon X \to E$ отображение, которое точке $x \in X$ ставит в соответствие линейное отображение $\psi \mapsto \psi(x)$ из E_1 в E_0. Это морфизм класса C^r; для $x \in X$, $g \in G$ и $\psi \in E_1$

$$\varphi(gx)(\psi) = \psi(gx) = \varphi(x)(\psi \circ \tau(g)) = (\rho(g)\,\varphi(x))(\psi),$$

где через $\tau(g)$ обозначается автоморфизм $x \mapsto gx$ пространства X.

Пусть $\alpha\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(E_1, E_0) \to E_0$ — линейное отображение $u \mapsto u(\varphi_0)$, тогда $\alpha \circ \varphi = \varphi_0$, так что φ — погружение в окрестности множества A ввиду того, что отображение φ_0 обладает этим свойством. Таким образом, существует такая открытая окрестность U множества A, что ограничение φ на U есть погружение; кроме того, согласно лемме 3, окрестность U можно выбрать устойчивой относительно действия группы G, что и завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. *Предположим, что X компактно. Существуют аналитическое линейное представление ρ группы G в конечномерном векторном пространстве E и погружение $\varphi\colon X \to E$, такие, что $\varphi(gx) = \rho(g)\,\varphi(x)$ для $g \in G$, $x \in X$.*

Следствие 2. *Пусть H — замкнутая подгруппа в G. Существуют аналитическое линейное представление группы Ли G в конечномерном векторном пространстве E и точка $v \in E$, стабилизатор которой совпадает с H.*

Применим следствие 1 к каноническому действию группы Ли G на компактном многообразии G/H. Тогда мы получим аналитическое линей-

ное представление $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(E)$ и такое погружение $\varphi\colon G/H \to E$, что $\varphi(gx)=\rho(g)\varphi(x)$ для $g \in G$, $x \in G/H$. Пусть $\bar{e} \in G/H$ — класс элемента $e \in G$ и $v=\varphi(\bar{e})$ — его образ. Для любого $g \in G$

$$\rho(g)v=v \Leftrightarrow \varphi(g\bar{e})=\varphi(\bar{e}) \Leftrightarrow g\bar{e}=\bar{e} \Leftrightarrow g \in H.$$

Следствие 3. *Предположим, что пространство X паракомпактно. Существуют вещественное гильбертово пространство E, непрерывное унитарное*[1] *представление ρ группы Ли G в пространстве E и погружение $\varphi\colon X \to E$ класса C^r, такие, что $\varphi(gx)=\rho(g)\varphi(x)$ для любого $g \in G$ и любого $x \in X$.*

Пространство X/G локально компактно (*Общ. топ.*, 1969, гл. III, § 4, n° 5, предложение 11). Его связные компоненты суть образы связных компонент пространства X, которые являются пространствами, счетными в бесконечности (*Общ. топ.*, 1968, гл. I, § 9, n° 10, теорема 5); следовательно, и сами они счетны в бесконечности, что влечет за собой паракомпактность X/G (*там же*). Стало быть, существуют локально конечное покрытие $(U'_\alpha)_{\alpha \in I}$ пространства X/G открытыми относительно компактными множествами и такое покрытие $(V'_\alpha)_{\alpha \in I}$, что $\bar{V}'_\alpha \subset U'_\alpha$ для любого $\alpha \in I$ (*Top. gen.*, chap. IX, p. 48, cor. 1 [2]); тогда для прообраза X получаем два локально конечных покрытия $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ и $(V_\alpha)_{\alpha \in I}$ открытыми относительно компактными устойчивыми относительно G множествами, такими, что $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$ для любого $\alpha \in I$.

Для любого $\alpha \in I$ существуют представление ρ_α группы G в конечномерном вещественном векторном пространстве E_α и морфизм $\varphi_\alpha \in \mathscr{C}^r(X; E_\alpha)$, согласованный с действием группы G и такой, что его ограничение на U_α есть погружение (теорема 1). Для любого $\alpha \in I$ пусть a_α — числовая функция на X класса C^r, равная 1 на V_α и 0 вне U_α (*Мн., Св. рез.*, 5.3.6). Положим $b_\alpha(x)=\int_G a_\alpha(gx)\,dg$ для $x \in X$. Функция b_α есть функция класса C^r, инвариантная относительно G (§ 6, n° 4, следствие 2), равная 1 на V_α и 0 вне U_α. Снабдим каждое E_α гильбертовым скалярным произведением, инвариантным относительно G (§ 1, n° 1), а $\mathbf{R}$ канонической гильбертовой структурой. Пусть E — пространство, являющееся гильбертовой суммой семейства $(E_\alpha \oplus \mathbf{R})_{\alpha \in I}$, и пусть ρ — представление группы G в E, полученное из представлений ρ_α и тривиального действия группы G на $\mathbf{R}$. Для любого $x \in X$ положим $\varphi(x)=(b_\alpha(x)\varphi_\alpha(x), b_\alpha(x))_{\alpha \in I}$. Тогда φ — морфизм класса C^r из X в E, согласованный с действием группы G. Аналогично тому, как это было сделано в доказательстве предложения 4 (n° 1), проверяется, что φ есть погружение. Это и завершает доказательство следствия.

---

[1] То есть (*Th. spec.*) непрерывное линейное представление (*Интегр.*, гл. VIII, § 2, n° 1), такое, что операторы $\rho(g)$ унитарны для всех $g \in G$.

[2] См. также *Общ. топ.*, 1975, гл. IX, § 4, n° 3.— *Прим. перев.*

3. Трубки и трансверсали

Лемма 4. *Пусть H — компактная группа Ли, $\rho\colon H \to \mathbf{GL}(V)$ — ее непрерывное (а значит, аналитическое) представление в конечномерном вещественном векторном пространстве и W — окрестность начала координат в V. Существуют открытая окрестность начала координат B, содержащаяся в W и устойчивая относительно H, и аналитический изоморфизм $u\colon V \to B$, согласованный с действием H и такой, что $u(0)=0$ и $Du(0)=\mathrm{Id}_V$.*

Выберем скалярное произведение на V, инвариантное относительно H (§ 1, n° 1). Существует такое вещественное число $r>0$, что открытый шар B радиуса r содержится в W; очевидно, что этот шар устойчив относительно H. Для любого $v \in V$ положим $u(v)=r(r^2+\|v\|^2)^{-1/2}v$; тогда u — биективное аналитическое отображение из V в B, согласованное с действием группы H, а обратное к нему отображение $w \mapsto r(r^2-\|w\|^2)^{-1/2}w$ аналитично. И, более того, $u(0)=0$, а $Du(0)=\mathrm{Id}_V$.

Предложение 5. *Пусть H — компактная группа Ли, $(h, x) \mapsto hx$ — закон левого действия класса C^r группы H на X и x — точка в X, неподвижная относительно действия группы H. Тогда группа H действует линейными преобразованиями на векторном пространстве $T=T_x(X)$, и существует открытое погружение $\varphi\colon T \to X$ класса C^r, согласованное с действием группы H и такое, что $\varphi(0)=x$, а $T_0(\varphi)$ есть тождественное отображение пространства T.*

Пусть (U, ψ, E) — такая карта на X в x, что область U устойчива относительно H (n° 2, лемма 3) и что $\psi(x)=0$. Отождествим E с T при помощи $T_x(\psi)$ и положим

$$\psi^{\#}(y)=\int_H h.\psi(h^{-1}y)\,dh \quad \text{для } y \in U,$$

где dh есть мера Хаара на H с полной массой 1.

Тогда (§ 6, n° 4, следствие 1) $\psi^{\#}$ — морфизм класса C^r из U в T, согласованный с действием H и такой, что $\psi^{\#}(x)=0$, а $d_x\psi^{\#}=\mathrm{Id}_T$. Стало быть, существуют открытое множество $U' \subset U$, содержащее x, и открытая окрестность V точки 0 в T, такие, что $\psi^{\#}$ индуцирует изоморфизм $\theta\colon U' \to V$. Уменьшая в случае необходимости U' и V, можно предполагать, что они устойчивы относительно H и что существует изоморфизм $u\colon T \to V$, согласованный с действием группы H (лемма 4). Таким образом, достаточно взять $\varphi=\theta^{-1}\circ u$.

Напомним (*Мн., Св. рез.*, 6.5.1), что если G — группа Ли, H — подгруппа Ли в G и Y — многообразие, на котором группа H действует слева, то через $G \times^H Y$ обозначается фактормногообразие произведения многообразий $G \times Y$ по правому действию $((g, y), h) \mapsto (gh, h^{-1}y)$ группы H; это многообразие, на котором группа Ли G действует справа естественным образом; проекция $G \times^H Y \to G/H$ является расслоением со слоем Y.

Кроме того, если Y — конечномерное векторное пространство, на котором группа H действует линейными преобразованиями, то $G\times^{H}Y$ наделено естественной структурой векторного G-расслоения с базой G/H (*Мн., Св. рез.,* 7.10.2).

Пусть G — группа Ли, *собственно* [1]) действующая на многообразии X (*Общ. топ.,* 1969, гл. III, § 4, n° 1, определение 1) так, что закон действия $(g, x)\mapsto gx$ принадлежит классу C^r. Тогда для любой точки x из X орбита Gx точки x — замкнутое подмногообразие в X, изоморфное однородному пространству Ли G/G_x, где G_x — стабилизатор точки x в G (см. гл. III, § 1, n° 7, предложение 14 (ii), и *Общ. топ.,* 1969, гл. III, § 4, n° 2, предложение 4), являющийся компактной группой Ли (*там же*).

Предложение 6. *Предположим, что многообразие X паракомпактно. Пусть x — точка в X и G_x — ее стабилизатор. Существуют конечномерное аналитическое линейное представление $\tau\colon G_x\to \mathbf{GL}(W)$ и открытое погружение $\alpha\colon G\times^{G_x}W\to X$ класса C^r, перестановочное с действием группы G и отображающее класс элемента $(e, 0)\in G\times W$ в точку x.*

Положим $T=T_x(X)$. Пусть W — подпространство в T, устойчивое относительно действия G_x и дополнительное к подпространству $T_x(Gx)$ в T (например, ортогональное дополнение к $T_x(Gx)$ относительно G_x-инвариантного скалярного произведения на T). С другой стороны, пусть $\varphi\colon T\to X$ — морфизм, обладающий свойствами из условия предложения 5 (относительно $H=G_x$). Рассмотрим морфизм $\lambda\colon G\times W\to X$, определяемый формулой $\lambda(g, w)=g\varphi(w)$. Он индуцирует при переходе к фактормногообразиям морфизм $\mu\colon G\times^{G_x}W\to X$ класса C^r, перестановочный с действием группы G и отображающий класс z элемента $(e, 0)$ в точку x.

Покажем, что морфизм μ этален в точке z. Имеем
$$\dim(G\times^{G_x}W)=\dim(G)+\dim(W)-\dim(G_x)=\dim(Gx)+\dim(W)=\dim(T),$$
и, стало быть, достаточно показать, что μ есть субмерсия в точке z или что λ есть субмерсия в точке $(e, 0)$. Но касательное отображение $T_{(e,\,0)}(\lambda)\colon T_e(G)\oplus W\to T$ совпадает с отображением $T_e(\rho(x))+i$, где $\rho(x)$ — орбитальное отображение $g\mapsto gx$, а i — каноническое вложение W в T. Поскольку $\operatorname{Im} T_e(\rho(x))=T_x(Gx)$, то отображение $T_{(e,\,0)}(\lambda)$ сюръективно и морфизм μ этален в z.

Мы покажем, что существует открытая окрестность Ω множества Gz в $G\times^{G_x}W$, *устойчивая относительно* G и такая, что μ индуцирует изоморфизм множества Ω на открытое подмножество в X. Отсюда сразу вытекает предложение: действительно, прообраз множества Ω в $G\times W$ устойчив относительно G и, стало быть, имеет вид $G\times B$, где B — открытое подмножество в W, содержащее начало координат и устойчивое относительно G_x. Уменьшая в случае необходимости Ω, можно предположить, что существует изоморфизм $u\colon W\to B$, перестановочный с действием группы G_x (лемма 4). Очевидно, что композиция морфизмов

[1]) См. примечание на стр. 21.— *Прим. перев.*

$$\alpha\colon G\times^{G_x} W \xrightarrow{(\mathrm{Id},\, u)} G\times^{G_x} B \xrightarrow{\mu} X$$

удовлетворяет условиям предложения.

Теперь предложение вытекает из следующей леммы:

Лемма 5. *Пусть Z — отделимое многообразие класса C^r, наделенное законом левого действия $m\colon G\times Z\to Z$ класса C^r, и $\mu\colon Z\to X$ — морфизм (класса C^r), перестановочный с действием группы Ли G. Пусть $z\in Z$ и $x=\mu(z)$. Предположим, что морфизм μ этален в z, а стабилизатор точки z в G совпадает со стабилизатором G_x точки x. Тогда существует открытая окрестность Ω орбиты Gz, устойчивая относительно G и такая, что μ задает изоморфизм Ω на открытое подмножество в X.*

Поскольку морфизм μ перестановочен с действием группы G, он этален во всех точках орбиты Gz. Так как каноническое отображение $G/G_x\to Gx$ является гомеоморфизмом, то отображение Gz в Gx, задаваемое морфизмом μ,— также гомеоморфизм. Тогда из предложения 2 из n° 1 следует существование такой открытой окрестности U орбиты Gz в Z, что μ задает открытое погружение множества U в X.

Поскольку группа G собственно действует на X, то существуют открытая окрестность V точки x и компактное подмножество K в G, такие, что $gV\cap V=\varnothing$ для $g\notin K$ (*Общ. топ.*, 1969, гл. III, § 4, n° 4, предложение 7), и, в частности, $e\in K$. Множество W_1 таких точек $y\in Z$, что $Ky\subset U$, открыто в Z: действительно, $Z-W_1$ есть образ замкнутого множества $(K\times Z)-m^{-1}(U)$ при собственной проекции $\mathrm{pr}_2\colon K\times Z\to Z$. Положим $W=W_1\cap\mu^{-1}(V)$; это — открытое подмножество в Z, содержащее z и удовлетворяющее следующим условиям:

(i) $KW\subset U$ и, в частности, $W\subset U$;

(ii) $\mu(W)\subset V$.

Положим $\Omega=GW$ и рассмотрим ограничение μ на Ω. Это этальный морфизм, так как любая точка из Ω сопряжена при помощи группы G с некоторой точкой из U. Покажем, что это ограничение инъективно: пусть g, h — такие элементы из G и u, v — такие элементы из W, что $\mu(gu)=\mu(hv)$. Положим $k=g^{-1}h$; тогда $\mu(u)=k\,\mu(v)$, откуда, согласно (ii), $k\in K$. Но ввиду (i) kv и u принадлежат U; следовательно, $u=kv$, поскольку ограничение μ на V инъективно, откуда $gu=hv$. Таким образом, ограничение μ на Ω инъективно и, значит (*Мн., Св., рез.*, 5.7.8), является изоморфизмом на открытое подмногообразие в X, что завершает доказательство леммы.

В условиях предложения 6 образ α есть открытая окрестность T орбиты A точки x, наделенная структурой векторного расслоения с базой A, для которого нулевое сечение — это сама орбита A. Такая окрестность называется *линейной трубкой* (вокруг рассматриваемой орбиты). Для каждой точки $a\in A$ слой Y_a этого векторного расслоения есть подмногообразие в X, устойчивое относительно стабилизатора G_a точки a и такое, что морфизм из $G\times^{G_a} Y_a$ в X, отображающий класс элемента $(g, y)\in G\times Y_a$

в $gy \in X$, задает изоморфизм класса C^r между $G \overset{G_a}{\times} Y_a$ и T. В этом случае говорят, что Y_a есть *трансверсаль* в точке a к трубке T. Заметим, что касательное пространство в точке a к Y_a каноническим образом изоморфно Y_a и что оно является дополнительным подпространством к $T_a(A)$ в $T_a(X)$; векторное расслоение T с базой A, следовательно, каноническим образом изоморфно нормальному расслоению над A в X (*Мн., Св. рез.,* 8.1.3).

4. Орбитальные типы

Пусть G — топологическая группа, действующая непрерывно на отделимом топологическом пространстве E. Для каждой точки x из E обозначим через G_x стабилизатор x в G и предположим, что каноническое отображение $G/G_x \to Gx$ есть гомеоморфизм; это, в частности, выполняется в двух следующих случаях:

а) топологии в G и E дискретны;

б) G собственно действует на E (*Общ. топ.,* 1969, гл. III, § 4, n° 2, предложение 4), например, группа G компактна (*Общ. топ.,* 1969, гл. III, § 4, n° 1, предложение 2).

Обозначим через $\mathscr{T}$ множество классов сопряженности замкнутых подгрупп в G. Для любой точки $x \in E$ *орбитальным типом* точки x или иногда просто типом точки x называется класс в $\mathscr{T}$ группы G_x; две точки одной орбиты имеют одинаковый орбитальный тип (*Alg.*, chap. I, p. 52, prop. 2); две орбиты имеют одинаковый тип тогда и только тогда, когда они изоморфны как G-множества (*Alg.*, chap. I, p. 57, th. 1). Для любого $t \in \mathscr{T}$ через $E_{(t)}$ обозначается множество точек в E типа t, т. е. объединение орбит типа t; это — устойчивое подмножество в E. Если $H \in t$, то пишут также $E_{(H)}$ вместо $E_{(t)}$; например, $E_{(G)}$ есть замкнутое подпространство в E, состоящее из точек, неподвижных относительно G.

Снабдим $\mathscr{T}$ следующим отношением предпорядка:

$$t \leqslant t' \Leftrightarrow \text{существуют такие } H \in t \text{ и } H' \in t', \text{ что } H \supset H'.$$

Пусть Ω и Ω' — две орбиты группы G в E и t и t' — их типы. Для того чтобы $t \leqslant t'$, необходимо и достаточно существование G-морфизма (обязательно непрерывного и сюръективного) из Ω' в Ω.

Пусть x, x' — точки из E, а t и t' — их типы. Для того чтобы $t \leqslant t'$, необходимо и достаточно существование такого элемента $a \in G$, что $aG_{x'}a^{-1} \subset G_x$.

Лемма 6. *Пусть G — группа Ли.*

а) *Любая убывающая последовательность компактных подгрупп в G стабилизируется.*

б) *Пусть H и H' — две компактные подгруппы в G, такие, что $H \subset H'$ и что существует изоморфизм между топологическими группами H' и H. Тогда $H = H'$.*

в) *Множество $\mathscr{T}$, наделенное отношением $t \leqslant t'$, есть нётерово упорядоченное множество* (*Th. ens.*, chap. III, p. 51).

а) Пусть $(H_i)_{i \geqslant 1}$ — убывающая последовательность компактных подгрупп в G; это последовательность подгрупп Ли (гл. III, § 8, n° 2, теорема 2). Последовательность целых чисел $(\dim H_i)_{i \geqslant 1}$ не возрастает и, следовательно, стабилизируется; существует такое целое число N, что все подгруппы H_i для $i \geqslant N$ имеют общую связную компоненту единицы. Убывающая последовательность целых положительных чисел $(H_i:(H_i)_0)_{i \geqslant N}$ также стабилизируется, и, стало быть, $H_i = H_{i+1}$ для достаточно больших i.

б) Пусть f — изоморфизм между H' и H. Последовательность $(f^n(H))_{n \geqslant 0}$ — это убывающая последовательность компактных подгрупп в G; тогда ввиду а) $f^n(H) = f^{n+1}(H)$ для достаточно большого n. Так как f — изоморфизм, то $f(H) = H = f(H')$, откуда $H = H'$.

в) Пусть $t, t' \in \mathscr{T}$ таковы, что $t \leqslant t'$ и $t' \leqslant t$. Существуют такие подгруппы $H, H_1 \in t$ и $H', H'_1 \in t'$, что $H \supset H'$ и $H_1 \subset H'_1$. Пусть g и g' — такие два элемента из G, что $H_1 = gHg^{-1}$ и $H'_1 = g'H'g'^{-1}$; положим $u = g'^{-1}g$. Тогда

$$uHu^{-1} \subset H' \subset H,$$

и, принимая во внимание б), получаем, что $uHu^{-1} = H$, откуда $H' = H$ и $t' = t$. Таким образом, множество $\mathscr{T}$ упорядоченно и ввиду а) нётерово.

Теорема 2. *Пусть G — группа Ли, собственным образом действующая на X, так что закон действия $(g, x) \mapsto gx$ принадлежит классу C^r. Предположим, что X паракомпактно.*

а) *Отображение, которое каждой точке из X ставит в соответствие ее орбитальный тип, обладает следующим свойством полунепрерывности: пусть $x \in X$, и пусть $t \in \mathscr{T}$ — орбитальный тип точки x; существует устойчивая относительно G открытая окрестность U точки x, такая, что тип любой точки $u \in U$ будет больше или равен t.*

б) *$X_{(t)}$ для любого $t \in \mathscr{T}$ есть подмногообразие в X, отношение эквивалентности на $X_{(t)}$, индуцированное действием группы G, регулярно* (*Мн., Св. рез.*, 5.9.5), *и морфизм $X_{(t)} \to X_{(t)}/G$ является расслоением.*

в) *Предположим, что X/G связно. Тогда множество орбитальных типов элементов из X обладает наибольшим элементом τ; кроме того, $X_{(\tau)}$ есть открытое и плотное подмножество в X, а множество $X_{(\tau)}/G$ связно.*

Пусть x — точка из X и $t \in \mathscr{T}$ — ее тип. Для доказательства а) и б) можно заменить X на устойчивое открытое множество, содержащее x, т. е. (предложение 6) предположить, что X имеет вид $G \times^H W$, где W — пространство конечномерного аналитического линейного представления некоторой компактной подгруппы H в G, и что точка x есть образ $p(e, 0)$ элемента $(e, 0) \in G \times W$ при канонической проекции $p\colon G \times W \to G \times^H W$. Если $u = p(g, y) \in G \times^H W$ и $a \in G$, то $au = u$ тогда и только тогда, когда

существует такой элемент $h \in H$, что $(ag, y) = (gh^{-1}, hy)$, т. е. тогда, когда $a \in gH_y g^{-1}$. Таким образом, $G_u = gH_y g^{-1}$ и, в частности, $G_x = H$; следовательно, G_u сопряжена с некоторой подгруппой в G_x. Это доказывает, что тип точки u больше или равен t, откуда получаем а).

Кроме того, для того чтобы точка u имела тип t, необходимо и достаточно, чтобы подгруппа G_u была сопряжена в G с подгруппой H или также чтобы H_y была сопряжена с H в G; согласно лемме 6б), это означает, что $H_y = H$, т. е. что точка y неподвижна относительно H. Если W' — векторное подпространство в W, состоящее из неподвижных относительно H элементов, то $X_{(t)}$ отождествляется с $G \times^H W'$ и, стало быть, с $G/H \times W'$, откуда вытекает б).

Для доказательства в) заметим, что из предположения о связности X/G вытекает, что X — чистое многообразие конечной размерности: действительно, для любого $k \geqslant 0$ обозначим через X_k множество точек $x \in X$, таких, что $\dim_x X = k$; тогда множество X_k одновременно открыто и замкнуто в X и устойчиво относительно G; стало быть, X совпадает с одним из множеств X_k.

Проведем доказательство пункта в) индукцией по размерности многообразия X; утверждение очевидно для $\dim X = 0$. Пусть τ — максимальный элемент среди орбитальных типов точек из X (такой элемент существует согласно лемме 6в)). Докажем следующее утверждение:

в′) *Для любого подмножества A из $X_{(\tau)}$, одновременно открытого и замкнутого в $X_{(\tau)}$ и устойчивого относительно G, замыкание $\bar{A}$ множества A открыто в X.*

Это утверждение влечет за собой в). Действительно, отметим сначала, что ввиду а) множество $X_{(\tau)}$ открыто в X; из утверждения в′) вытекает, что множество $\bar{X}_{(\tau)}$ открыто и замкнуто в X и, следовательно, совпадает с X, так как оно устойчиво относительно G, а пространство X/G связно. Пусть A — непустое открытое и замкнутое подмножество в $X_{(\tau)}$, устойчивое относительно G; согласно в′), $\bar{A}$ открыто и замкнуто в X и устойчиво относительно G, а следовательно, совпадает с X; из этого вытекает, что подмножество A плотно в $X_{(\tau)}$ и, стало быть, совпадает с $X_{(\tau)}$. Таким образом, любое непустое открытое и замкнутое подмножество в $X_{(\tau)}/G$ совпадает с $X_{(\tau)}/G$, что доказывает связность пространства $X_{(\tau)}/G$. Наконец, поскольку $X_{(\tau)}$ плотно в X, из а) следует, что любая точка из X имеет тип $\leqslant \tau$; другими словами, τ есть наибольший элемент среди орбитальных типов точек из X.

Теперь докажем в′). Можно предполагать, что множество A непусто; пусть $x \in \bar{A}$. Нужно доказать, что $\bar{A}$ — окрестность точки x. При этом можно предполагать, как это делалось выше, что $X = G \times^H W$, где подгруппа H компактна, а x — канонический образ элемента $(e, 0)$. Предположим сначала, что H действует тривиально на W; тогда X отождествляется с $(G/H) \times W$, а пространство $X_{(\tau)}/G = X/G$ гомеоморфно пространству W и, следовательно, связно; поэтому $A/G = X/G$, откуда $A = X$. Впредь будем предполагать, что H действует нетривиально на W. Выберем на W скалярное произведение, инвариантное относительно компактной груп-

пы H; пусть S — единичная сфера в пространстве W (т. е. множество векторов с нормой 1). Заметим, что пространство S/H связно: действительно, если $\dim(W)\geqslant 2$, то S связно, а если $\dim(W)=1$, то S является пространством, состоящим из двух точек, на котором группа H действует нетривиально. Положим $Y=G\times^H S$; это — замкнутое подмногообразие в X, устойчивое относительно G и имеющее коразмерность 1, а пространство Y/G, гомеоморфное S/H, связно. В силу предположения индукции существует орбитальный тип θ, максимальный для Y, множество $Y_{(\theta)}$ открыто и замкнуто в Y, а пространство $Y_{(\theta)}/G$ связно.

Рассмотрим действие $\mathbf{R}_+^*$ на X, получаемое при переходе к фактормногообразию из закона действия $(\lambda, (g, w))\mapsto(g, \lambda w)$ группы $\mathbf{R}_+^*$ на $G\times\times W$. Две точки из X, сопряженные относительно этого действия, имеют один и тот же орбитальный тип; следовательно, $X_{(\theta)}$ содержит подмножество $\mathbf{R}_+^* Y_{(\theta)}$, которое является открытым и плотным подмножеством в X. Однако ввиду а) множество $X_{(\tau)}$ открыто и, следовательно, пересекается с $X_{(\theta)}$, но тогда $\theta=\tau$.

С другой стороны, гомеоморфизм $(\lambda, w)\mapsto\lambda w$ из $\mathbf{R}_+^*\times S$ на $W-\{0\}$ (*Общ. топ.,* 1969, гл. VI, § 2, n° 3, предложение 3) индуцирует гомеоморфизм из $\mathbf{R}_+^*\times(S/H)$ на $(\mathbf{R}_+^*S)/H$, а, стало быть, также из $\mathbf{R}_+^*\times(Y/G)$ на $(\mathbf{R}_+^*Y)/G$ и из $\mathbf{R}_+^*\times(Y_{(\theta)}/G)$ на $(\mathbf{R}_+^*Y_{(\theta)})/G$. Таким образом, множество $(\mathbf{R}_+^*Y_{(\theta)})/G$ связно, а множество $X_{(\tau)}/G$ содержит плотное связное подмножество и, следовательно, само связно (*Общ. топ.,* 1968, гл. I, § 11, n° 1, предложение 1). Но тогда множество A совпадает с $X_{(\tau)}$ и, значит, плотно в X, а $\bar{A}$ является окрестностью точки x. Это завершает доказательство теоремы.

В обозначениях теоремы 2в) точки из $X_{(\tau)}$ называются *главными точками,* а их орбиты — *главными* орбитами. Если x — точка из X и если $G\times^{G_x} W$— линейная трубка в X вокруг орбиты точки x, то x — главная точка тогда и только тогда, когда G_x действует тривиально в пространстве W, т. е. когда трубка имеет вид $(G/G_x)\times W$.

Примеры. 1) Пусть G — связная компактная группа Ли, действующая на себе внутренними автоморфизмами. Стабилизатор элемента x в G есть не что иное, как централизатор $Z(x)$ элемента x в G; он содержит любой максимальный тор, содержащий x. Отсюда следует, что наибольший орбитальный тип τ есть класс сопряженности максимальных торов в группе Ли G. Открытое подмножество $G_{(\tau)}$ состоит из *вполне регулярных* элементов группы Ли G (§ 5, n° 1, замечание). Предположим, что G односвязна. Тогда $G_{(\tau)}$ совпадает с множеством G_r ее регулярных элементов (§ 5, n° 2, замечание 2); если A — альков подалгебры Картана $\mathfrak{t}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}=L(G)$, то *отображение, являющееся композицией отображений* $\pi\colon A\xrightarrow{\exp} G_r\to G_r/\mathrm{Int}(G)$, *есть изоморфизм аналитических многообразий.* В самом деле, это гомеоморфизм (§ 5, n° 2, следствие 1 предложения 2). Пусть $a\in A$; положим $t=\exp a$ и отождествим $T_t(G)$ с $\mathfrak{g}$ при помощи сдвига $\gamma(t)$. Тогда касательное отображение $T_a(\pi)$ отождествится с отобра-

жением, являющимся композицией канонического вложения $\mathfrak{t} \to \mathfrak{g}$ и отображения перехода к факторгруппе $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathrm{Im}\,(\mathrm{Ad}\, t^{-1} - 1)$. Поскольку элемент t регулярен, $T_a(\pi)$ есть изоморфизм, откуда получаем искомый результат (*Мн., Св. рез.*, 5.7.8).

2) Пусть E — вещественное аффинное евклидово пространство, $\mathfrak{H}$ — множество гиперплоскостей в E и W — группа преобразований пространства E, порожденная ортогональными отражениями относительно гиперплоскостей из $\mathfrak{H}$. Предположим, что множество $\mathfrak{H}$ устойчиво относительно W, а группа W, наделенная дискретной топологией, естественным образом действует в пространстве E.

Можно применить сказанное выше к действию группы W на E. Стабилизатор точки x из E является подгруппой в W, порожденной отражениями относительно гиперплоскостей из $\mathfrak{H}$, содержащих точку x (гл. V, § 3, n° 3, предложение 2). Следовательно, наибольшим орбитальным типом τ является класс подгруппы $\{\mathrm{Id}_E\}$, а $E_{(\tau)}$ — объединение камер в E. Отметим, что в этом случае накрытие $E_{(\tau)} \to E_{(\tau)}/W$ *тривиально*, и, в частности, множество $E_{(\tau)}$ несвязно, если множество $\mathfrak{H}$ непусто.

ДОПОЛНЕНИЕ I

Структура компактных групп

1. Погружение компактной группы в произведение групп Ли

Предложение 1. *Любая компактная топологическая группа G изоморфна замкнутой подгруппе в произведении компактных групп Ли.*

Обозначим через $\widehat{G}$ множество классов унитарных неприводимых непрерывных представлений группы G в конечномерных комплексных гильбертовых пространствах (*Th. spec.*). Для любого элемента $u \in \widehat{G}$ пусть H_u — пространство представления u и $\rho_u \colon G \to \mathbf{U}(H_u)$ — гомоморфизм, ассоциированный с u. Согласно теореме Петера — Вейля (*Th. spec.*), непрерывный гомоморфизм $\rho = (\rho_u)_{u \in \widehat{G}}$ из G в $\prod_{u \in \widehat{G}} \mathbf{U}(H_u)$ инъективен; поскольку группа G компактна, ρ индуцирует изоморфизм группы G на замкнутую подгруппу в группе $\prod_{u \in \widehat{G}} \mathbf{U}(H_u)$.

Следствие 1. *Пусть V — окрестность единичного элемента в G. Тогда V содержит такую нормальную замкнутую подгруппу H группы G, что факторгруппа G/H является группой Ли.*

Пусть $(K_\lambda)_{\lambda \in L}$ — такое семейство компактных групп Ли, что G отождествляется с замкнутой подгруппой в $\prod_{\lambda \in L} K_\lambda$. Для любого $\lambda \in L$ обозначим

через $p_\lambda\colon G \to K_\lambda$ ограничение на G канонической проекции. Существуют конечное множество $J \subset L$ и для каждого $\lambda \in J$ окрестность начала координат V_λ в K_λ, такие, что V содержит $\bigcap\limits_{\lambda\in J} p_\lambda^{-1}(V_\lambda)$. Теперь достаточно положить $H = \bigcap\limits_{\lambda \in J} \operatorname{Ker}(p_\lambda)$.

Обозначим через $(H_\alpha)_{\alpha\in I}$ убывающее фильтрующееся семейство замкнутых нормальных подгрупп в G, такое, что факторгруппа G/H_α является группой Ли. Рассмотрим проективную систему компактных групп Ли G/H_α (см. *Общ. топ.*, 1969, гл. III, § 7, n° 3).

Следствие 2. *Каноническое отображение* $G \to \varprojlim\limits_{\alpha} G/H_\alpha$ *есть изоморфизм топологических групп.*

Действительно, из следствия 1 вытекает, что условие (AP) из *Общ. топ.*, 1969, гл. III, § 7, n° 3, выполнено; теперь утверждение следует из предложения 2 из *Общ. топ.*, 1969, гл. III, § 7, n° 3.

Следствие 3. *Для того чтобы G была группой Ли, необходимо и достаточно, чтобы в ней существовала окрестность единичного элемента e, не содержащая никакой нормальной подгруппы, отличной от $\{e\}$.*

Необходимость этого условия уже доказана (гл. III, § 4, n° 2, следствие 1 теоремы 2), а достаточность легко получается из следствия 1.

2. Проективный предел групп Ли

Лемма 1. *Пусть $(G_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — проективная система топологических групп относительно фильтрующегося множества индексов I и G — ее предел. Предположим, что канонические отображения $f_\alpha\colon G \to G_\alpha$ сюръективны.*

а) *Подгруппы* $\overline{D(G_\alpha)}$ (соотв. $C(G_\alpha)$, соотв. $C(G_\alpha)_0$) *образуют проективную систему подмножеств в G_α.*

б) $\overline{D(G)} = \varprojlim\limits_{\alpha} \overline{D(G_\alpha)}$ *и* $C(G) = \varprojlim\limits_{\alpha} C(G_\alpha)$.

в) *Если группа G_α компактна для любого $\alpha \in I$, то* $C(G)_0 = \varprojlim\limits_{\alpha} C(G_\alpha)_0$.

Пусть α, β — два элемента из I, причем $\alpha \leqslant \beta$. Тогда $f_{\alpha\beta}(D(G_\beta)) \subset$ $\subset D(G_\alpha)$ и $f_{\alpha\beta}(C(G_\beta)) \subset C(G_\alpha)$, поскольку отображение $f_{\alpha\beta}$ сюръективно; из непрерывности отображения $f_{\alpha\beta}$ получаем, что $f_{\alpha\beta}(\overline{D(G_\beta)}) \subset \overline{D(G_\alpha)}$ и $f_{\alpha\beta}(C(G_\beta)_0) \subset C(G_\alpha)_0$, откуда следует а). Поскольку отображение f_α сюръективно, $f_\alpha(D(G)) = D(G_\alpha)$ (*Alg.*, chap. I, p. 67, prop. 6), тогда $\overline{D(G)} =$

$=\varprojlim \overline{D(G_\alpha)}$ (*Общ. топ.*, 1968, гл. I, § 4, n° 4, следствие). Из сюръективности f_α получаем включение $f_\alpha(C(G))\subset C(G_\alpha)$ и, стало быть, $C(G)\subset \subset \varprojlim C(G_\alpha)$; обратное включение очевидно. Наконец, утверждение в) вытекает из утверждения б) и из предложения 4 из *Общ. топ.*, гл. III, § 7, n° 3.

Лемма 2. *Пусть $(S_a)_{a\in A}$, $(T_b)_{b\in B}$ — два конечных семейства односвязных почти простых групп Ли* (гл. III, § 9, n° 8, определение 3), *и пусть $u\colon \prod_{a\in A} S_a\to\prod_{b\in B} T_b$ — сюръективный морфизм. Тогда существуют инъективное отображение $l\colon B\to A$ и такие изоморфизмы $u_b\colon S_{l(b)}\to T_b$ $(b\in B)$, что $u((s_a)_{a\in A})=(u_b(s_{l(b)}))_{b\in B}$ для любого элемента $(s_a)_{a\in A}$ из $\prod_{a\in A} S_a$.*

Обозначим через $\mathfrak{s}_a$ (соотв. $\mathfrak{t}_b$) алгебру Ли группы S_a (соотв. T_b) для $a\in A$ (соотв. $b\in B$) и рассмотрим гомоморфизм $L(u)\colon \prod_{a\in A}\mathfrak{s}_a\to\prod_{b\in B}\mathfrak{t}_b$. Его ядро есть идеал в полупростой алгебре Ли $\prod_{a\in A}\mathfrak{s}_a$ и, стало быть, имеет вид $\prod_{a\in A''}\mathfrak{s}_a$, где $A''\subset A$ (гл. I, § 6, n° 2, следствие 1). Положим $A'=A-A''$. При ограничении $L(u)$ определяет изоморфизм $f\colon \prod_{a\in A'}\mathfrak{s}_a\to\prod_{b\in B}\mathfrak{t}_b$. Согласно тому же следствию, для любого a из A' идеал $f(\mathfrak{s}_a)$ совпадает с одним из $\mathfrak{t}_b$; следовательно, существует такая биекция $l\colon B\to A'$, что $f(\mathfrak{s}_{l(b)})=\mathfrak{t}_b$ для $b\in B$, и f задает изоморфизм $f_b\colon\mathfrak{s}_{l(b)}\to\mathfrak{t}_b$. Поскольку группы S_a и T_b односвязны, существуют такие изоморфизмы $u_b\colon S_{l(b)}\to T_b$, что $L(u_b)=f_b$ для $b\in B$ (гл. III, § 6, n° 3, теорема 3).

Обозначим через $\tilde u\colon\prod_{a\in A} S_a\to\prod_{b\in B} T_b$ морфизм, определяемый формулой $\tilde u((s_a)_{a\in A})=(u_b(s_{l(b)}))_{b\in B}$. По построению имеем $L(\tilde u)=f=L(u)$, откуда $\tilde u=u$, что завершает доказательство леммы.

Лемма 3. *В условиях леммы 1 предположим, что группы G_α являются односвязными компактными группами Ли. Тогда топологическая группа G изоморфна произведению односвязных почти простых компактных групп Ли.*

Для любого $\alpha\in I$ группа G_α является прямым произведением конечного семейства односвязных почти простых подгрупп $(S_\alpha^\lambda)_{\lambda\in L_\alpha}$ (гл. III, § 9, n° 8, предложение 28). Пусть $\beta\in I$ и $\beta\geqslant\alpha$. Согласно лемме 2, существует такое отображение $l_{\beta\alpha}\colon L_\alpha\to L_\beta$, что $f_{\alpha\beta}(S_\beta^{l_{\beta\alpha}(\lambda)})=S_\alpha^\lambda$ для $\lambda\in L_\alpha$. Тогда $l_{\gamma\beta}\circ l_{\beta\alpha}=l_{\gamma\alpha}$ для $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$, так что $(L_\alpha, l_{\beta\alpha})$ есть индуктивная система множеств относительно I. Пусть L — ее предел; ввиду того что отображения

$l_{\beta\alpha}$ инъективны, L_α можно отождествить с подмножеством в L, так что $L = \bigcup\limits_{\alpha \in I} L_\alpha$.

Пусть $\lambda \in L$. Положим $S_\alpha^\lambda = \{1\}$, если $\lambda \notin L_\alpha$, и обозначим через $\varphi_{\alpha\beta}^\lambda \colon S_\beta^\lambda \to S_\alpha^\lambda$ морфизм, полученный из $f_{\alpha\beta}$; таким образом, мы придем к проективной системе топологических групп $(S_\alpha^\lambda, \varphi_{\alpha\beta}^\lambda)$, предел S_λ которой изоморфен S_α для некоторого достаточно большого α. Канонический гомоморфизм топологических групп

$$\varprojlim_{\alpha \in I} \left(\prod_{\lambda \in L} S_\alpha^\lambda \right) \to \prod_{\lambda \in L} \left(\varprojlim_{\alpha \in I} S_\alpha^\lambda \right)$$

биективен (*Th. ens.*, chap. III, p. 57, cor. 2); он является изоморфизмом, поскольку рассматриваемые группы компактны. Но первая из этих групп отождествляется с G, а вторая — с произведением групп S_λ, что завершает доказательство леммы.

3. Строение связных компактных групп

Пусть G — коммутативная компактная группа. Напомним (*Спектр. теор.*, гл. II, § 1, n° 9, предложение 11), что тогда G изоморфна топологической группе, двойственной к *дискретной* коммутативной группе $\widehat{G}$. Группа G связна тогда и только тогда, когда $\widehat{G}$ — группа без кручения (*Спектр. теор.*, гл. II, § 2, n° 2, следствие 1 предложения 4).

Следующие свойства эквивалентны (*Спектр. теор.*, гл. II, § 2, n° 2, следствие 2 предложения 4, и § 1, n° 9, следствие 2 предложения 11):

(i) G вполне несвязна;

(ii) $\widehat{G}$ — периодическая группа;

(iii) топологическая группа G изоморфна пределу проективной системы конечных (коммутативных) групп, снабженных дискретной топологией.

Следующее предложение обобщает следствие 1 предложения 4 из § 1, n° 4.

Предложение 2. *Пусть G — связная компактная группа.*

а) *$C(G)_0$ есть коммутативная связная компактная группа; $D(G)$ — связная компактная группа, совпадающая со своей производной группой.*

б) *Непрерывный гомоморфизм $(x, y) \mapsto xy$ из $C(G)_0 \times D(G)$ в G сюръективен, а его ядро есть центральная подгруппа в $C(G)_0 \times D(G)$, компактная и вполне несвязная.*

в) *Существуют семейство $(S_\lambda)_{\lambda \in L}$ компактных почти простых групп Ли и непрерывный сюръективный гомоморфизм $\prod\limits_{\alpha \in L} S_\alpha \to D(G)$, ядро которого есть компактная вполне несвязная центральная подгруппа.*

Пусть $(G_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — проективная система компактных групп Ли относительно фильтрующегося множества I, такая, что G изоморфна $\varprojlim G_\alpha$, а

канонические отображения $f_\alpha\colon G \to G_\alpha$ сюръективны (следствие 2 предложения 1). Для $\alpha \in I$ пусть $\pi_\alpha\colon \tilde{D}(G_\alpha) \to D(G_\alpha)$ — универсальное накрытие группы $D(G_\alpha)$. Из отображений $f_{\alpha\beta}$ получаем морфизмы $\tilde{f}_{\alpha\beta}\colon \tilde{D}(G_\beta) \to \tilde{D}(G_\alpha)$, так что $(\tilde{D}(G_\alpha), \tilde{f}_{\alpha\beta})$ есть проективная система топологических групп, удовлетворяющая условиям леммы 3.

Из этой же леммы следует, что топологическая группа $\varprojlim \tilde{D}(G_\alpha)$ изоморфна произведению семейства $(S_\lambda)_{\lambda \in L}$ компактных почти простых групп Ли. Согласно лемме 1, предел проективной системы гомоморфизмов (π_α) отождествляется с непрерывным гомоморфизмом $\pi\colon \prod_{\lambda \in L} S_\lambda \to \overline{D(G)}$, который сюръективен (*Общ. топ.*, 1969, гл. I, § 9, n° 6, следствие 2).

Теперь отметим, что группа $\prod_{\lambda \in L} S_\lambda$ совпадает со своей производной группой: это вытекает из следствия предложения 10 из § 4, n° 5. Стало быть, группа $\overline{D(G)}$ также совпадает со своей производной группой, поскольку гомоморфизм π сюръективен. В качестве следствия получаем $D(G) \supset D(\overline{D(G)}) = \overline{D(G)}$. Таким образом, группа $D(G)$ компактна и совпадает со своей производной группой; это доказывает а), так как утверждения, касающиеся $C(G)_0$, тривиальны.

С другой стороны, ядро гомоморфизма $\pi\colon \prod_{\lambda \in L} S_\lambda \to D(G)$ отождествляется с $\varprojlim \operatorname{Ker}(\pi_\alpha)$ (*Alg.*, chap. II, p. 89, rem. 1), т. е. с компактной вполне несвязной центральной подгруппой, откуда получаем в).

Докажем б). Для любого α из I морфизм $s_\alpha\colon C(G_\alpha)_0 \times D(G_\alpha) \to G_\alpha$, такой, что $s_\alpha(x, y) = xy$ для $x \in C(G_\alpha)_0$, $y \in D(G_\alpha)$, сюръективен, а его ядро является конечной центральной подгруппой (§ 1, n° 4, следствие 1 предложения 4). Морфизмы s_α образуют проективную систему отображений, предел которой отождествляется ввиду сказанного выше с гомоморфизмом $(x, y) \mapsto xy$ из $C(G)_0 \times D(G)$ в G. Теперь несложно показать, как это делалось выше, что этот морфизм сюръективен и что его ядро центрально и вполне несвязно, откуда вытекает б).

Следствие. *Любая разрешимая связная компактная группа коммутативна.*

Действительно, тогда ее производная группа разрешима и совпадает со своей производной группой (предложение 2а)); следовательно, она состоит лишь из единичного элемента.

ДОПОЛНЕНИЕ II

Представления вещественного, комплексного или кватернионного типа

1. Представления вещественных алгебр

Обозначим через σ автоморфизм $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ пространства $\mathbf{C}$; если W — комплексное векторное пространство, то через $\overline{W}$ обозначается векторное $\mathbf{C}$-пространство $\sigma_*(W)$ (т. е. группа W, наделенная законом действия $(\alpha, w) \mapsto \overline{\alpha} w$ для $\alpha \in \mathbf{C}$, $w \in W$).

Предложение 1. *Пусть A есть $\mathbf{R}$-алгебра (ассоциативная с единицей) и V — простой A-модуль конечной размерности над $\mathbf{R}$. Тогда имеет место один из следующих трех случаев*:

α) *коммутант модуля V* (*Алг.*, гл. VIII, § 1, n° 2) *изоморфен $\mathbf{R}$, и $A_{(\mathbf{C})}$-модуль $V_{(\mathbf{C})}$ прост*;

β) *коммутант модуля V изоморфен $\mathbf{C}$; $A_{(\mathbf{C})}$-модуль $V_{(\mathbf{C})}$ есть прямая сумма двух неизоморфных простых $A_{(\mathbf{C})}$-подмодулей, переводимых друг в друга автоморфизмом $\sigma \otimes 1_V$*;

γ) *коммутант модуля V изоморфен $\mathbf{H}$; $A_{(\mathbf{C})}$-модуль $V_{(\mathbf{C})}$ есть прямая сумма двух своих изоморфных простых $A_{(\mathbf{C})}$-подмодулей, переводимых друг в друга автоморфизмом $\sigma \otimes 1_V$.*

Коммутант E модуля V есть тело, являющееся конечным расширением $\mathbf{R}$ (*Alg.*, chap. VIII, § 3, n° 2, prop. 2), и, значит, изоморфен $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$ (*Alg.*, chap. VIII, § 15). $A_{(\mathbf{C})}$-модуль $V_{(\mathbf{C})}$ полупрост (*Алг.*, гл. VIII, § 3, n° 3), и его коммутант отождествляется с $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} E$ (*Alg.*, chap. VIII, § 11, n° 2, lemma 1).

Если E изоморфен $\mathbf{R}$, то коммутант модуля $V_{(\mathbf{C})}$ изоморфен $\mathbf{C}$ и $V_{(\mathbf{C})}$ — простой $A_{(\mathbf{C})}$-модуль (*Алг.*, гл. VIII, § 3, n° 1).

Если E не изоморфен $\mathbf{R}$, то он содержит поле, изоморфное $\mathbf{C}$. Отсюда получаем на V структуру $A_{(\mathbf{C})}$-модуля, обозначаемую через V^c. Тогда V^c — простой $A_{(\mathbf{C})}$-модуль, а $\mathbf{C}$-линейное отображение $\psi\colon V_{(\mathbf{C})} \to V^c \oplus \overline{V}^c$, такое, что $\psi(\alpha \otimes v) = (\alpha v, \overline{\alpha} v)$ для $\alpha \in \mathbf{C}$, $v \in V$,— изоморфизм (*Alg.*, chap. V, p. 61, prop. 8). Кроме того, $\sigma \otimes 1_V$ соответствует при этом изоморфизме $\mathbf{R}$-автоморфизму $(v, v') \mapsto (v', v)$ пространства $V^c \oplus \overline{V}^c$ и, стало быть, переводит $A_{(\mathbf{C})}$-подмодули $\psi^{-1}(V^c)$ и $\psi^{-1}(\overline{V}^c)$ друг в друга.

Коммутант $E_{(\mathbf{C})}$ модуля $V_{(\mathbf{C})}$ содержит, таким образом, алгебру $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, действующую на $V^c \oplus \overline{V}^c$ гомотетиями. Для того чтобы не существовало изоморфизма между $A_{(\mathbf{C})}$-модулями V^c и $\overline{V}^c$, необходимо и достаточно, чтобы алгебра $E_{(\mathbf{C})}$ совпадала с $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, т. е. чтобы тело E было изоморфно $\mathbf{C}$. Это и завершает доказательство.

Предложение 2. *Пусть A есть $\mathbf{R}$-алгебра (ассоциативная с единицей) и W — простой $A_{(\mathbf{C})}$-модуль конечной размерности над $\mathbf{C}$. Тогда имеет место один из следующих трех случаев:*

а) Существует $A_{(\mathbf{C})}$-изоморфизм θ пространства W на пространство $\bar{W}$, такой, что $\theta \circ \theta = 1_W$. Тогда множество V неподвижных точек отображения θ является $\mathbf{R}$-структурой на W, и простой A-модуль $W_{[\mathbf{R}]}$ имеет коммутант, равный $\mathbf{R}.1_V$. Кроме того, $W_{[\mathbf{R}]}$ является прямой суммой двух простых изоморфных A-модулей.

б) $A_{(\mathbf{C})}$-модули W и $\bar{W}$ не изоморфны; тогда $W_{[\mathbf{R}]}$ — простой A-модуль с коммутантом, равным $\mathbf{C}.1_W$.

в) Существует $A_{(\mathbf{C})}$-изоморфизм θ пространства W на пространство $\bar{W}$, такой, что $\theta \circ \theta = -1_W$. Тогда A-модуль $W_{[\mathbf{R}]}$ прост и его коммутант совпадает с телом $\mathbf{C}.1_W \oplus \mathbf{C}.\theta$, изоморфным $\mathbf{H}$.

Комплексное векторное пространство $\mathrm{Hom}_{A_{(\mathbf{C})}}(W, \overline{W})$ имеет размерность $\leqslant 1$ (*Alg.*, chap. VIII, § 3, n° 2); если $\theta \in \mathrm{Hom}_{A_{(\mathbf{C})}}(W, \overline{W})$, то эндоморфизм $\theta \circ \theta$ пространства W является гомотетией с коэффициентом $\alpha \in \mathbf{C}$. Для любого $w \in W$ имеем $\alpha\theta(w) = \theta \circ \theta \circ \theta(w) = \theta(\alpha w) = \bar{\alpha}\theta(w)$; таким образом, коэффициент α вещественный. Если $\theta' = \lambda\theta$ для $\lambda \in \mathbf{C}$, то $\theta' \circ \theta' = |\lambda|^2\, \theta \circ \theta$ и, стало быть, выполняется одна и только одна из следующих трех возможностей:

а) Существует $\theta \in \mathrm{Hom}_{A_{(\mathbf{C})}}(W, \overline{W})$, такой, что $\theta \circ \theta = 1_W$;

б) $\mathrm{Hom}_{A_{(\mathbf{C})}}(W, \overline{W}) = \{0\}$;

в) существует $\theta \in \mathrm{Hom}_{A_{(\mathbf{C})}}(W, \overline{W})$, такой, что $\theta \circ \theta = -1_W$.

В случае а) множество V неподвижных точек отображения θ является $\mathbf{R}$-структурой на W (*Alg.*, chap. V, p. 61, prop. 7); поскольку модуль $V_{(\mathbf{C})}$ изоморфен W, A-модуль V прост и его коммутант равен $\mathbf{R}.1_V$ (предложение 1), а модуль $W_{[\mathbf{R}]}$ не является простым.

Обратно, предположим, что модуль $W_{[\mathbf{R}]}$ непрост, тогда пусть V — простой A-подмодуль в $W_{[\mathbf{R}]}$; поскольку $A_{(\mathbf{C})}$-модуль W прост, то $V + iV = W$ и $V \cap iV = \{0\}$, т. е. $W = V \oplus iV$. Таким образом, V является $\mathbf{R}$-структурой на W, и изоморфизм θ пространства W на пространство $\bar{W}$, такой, что $\theta(v + iv') = v - iv'$ для v и v' из V, удовлетворяет условию $\theta \circ \theta = 1_W$.

В качестве следствия получаем, что в случаях б) и в) $A_{(\mathbf{C})}$-модуль $W_{[\mathbf{R}]}$ прост; согласно предложению 1, его коммутант E изоморфен $\mathbf{C}$ в случае б) и $\mathbf{H}$ в случае в). Кроме того, очевидно, что E содержит $\mathbf{C}.1_V$ и $\mathbf{C}.\theta$ в случае в), откуда и следует предложение.

В предположениях предложения 2 говорят, что W есть $A_{(\mathbf{C})}$-модуль *вещественного, комплексного или кватернионного типа* (относительно A), если имеет место случай а), б) или в) соответственно.

Для $K=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ обозначим через $\mathfrak{S}_K(A)$ множество классов простых $A_{(K)}$-модулей конечной размерности над K. Группа $\Gamma=\operatorname{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ действует на $\mathfrak{S}_{\mathbf{C}}(A)$; два предыдущих предложения устанавливают *биективное соответствие между* $\mathfrak{S}_{\mathbf{R}}(A)$ и фактормножеством $\mathfrak{S}_{\mathbf{C}}(A)/\Gamma$.

2. Представления компактных групп

Пусть G — компактная топологическая группа, и пусть $\rho\colon G\to\mathbf{GL}(W)$ — непрерывное представление группы G в конечномерном комплексном векторном пространстве. Будем говорить, что ρ — неприводимое представление *вещественного, комплексного или кватернионного типа*, если W является $\mathbf{C}^{(G)}$-модулем (относительно алгебры $A=\mathbf{R}^{(G)}$) соответственно вещественного, комплексного или кватернионного типа. Пусть H — невырожденная положительная эрмитова форма на W, инвариантная относительно G.

Предложение 3. *Предположим, что ρ неприводимо.*

a) ρ *есть представление вещественного типа тогда и только тогда, когда существует ненулевая билинейная симметрическая форма B на W, инвариантная относительно G. В этом случае форма B невырожденна; множество V, состоящее из таких элементов $w\in W$, что $H(w,x)=B(w,x)$ для любого $x\in W$, является $\mathbf{R}$-структурой на W, инвариантной относительно G.*

б) ρ *есть представление комплексного типа тогда и только тогда, когда не существует ненулевой билинейной формы на W, инвариантной относительно G.*

в) ρ *есть представление кватернионного типа тогда и только тогда, когда существует ненулевая знакопеременная билинейная форма на W, инвариантная относительно G; такая форма обязательно невырожденна.*

Для $\theta\in\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}^{(G)}}(W,\overline{W})$ и $x,y\in W$ положим $B_\theta(x,y)=H(\theta x,y)$. Тогда B_θ — билинейная форма на W, инвариантная относительно G и невырожденная, если гомоморфизм θ ненулевой. Обозначим через $\mathscr{B}(W)^G$ пространство билинейных форм на W, инвариантных относительно G; отображение $\theta\mapsto B_\theta$ из $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}^{(G)}}(W,\overline{W})$ на $\mathscr{B}(W)^G$ есть изоморфизм векторных $\mathbf{C}$-пространств. Отсюда, в частности, вытекает утверждение б).

Пусть θ есть $\mathbf{C}^{(G)}$-изоморфизм пространства W на $\overline{W}$, такой, что $\theta\circ\theta=\alpha_W$ для $\alpha\in\{-1,+1\}$ (предложение 2); поскольку пространство $\mathscr{B}(W)^G$ имеет размерность 1, то существует такое число $\varepsilon\in\mathbf{C}$, что

$$B_\theta(y,x)=\varepsilon B_\theta(x,y),\ \text{какими бы ни были } x,y \text{ из } W.$$

Повторно используя это свойство, получаем $B_\theta(y,x)=\varepsilon B_\theta(x,y)=\varepsilon^2B_\theta(y,x)$, откуда $\varepsilon^2=1$ и $\varepsilon\in\{-1,+1\}$. Кроме того, для x из W

$$H(\theta x, \theta x) = B_\theta(x, \theta x) = \varepsilon B_\theta(\theta x, x) = \varepsilon H(\theta\circ\theta(x), x) = \varepsilon\alpha H(x, x),$$

откуда $\varepsilon\alpha > 0$, поскольку форма H положительна, т. е. $\varepsilon = \alpha$. Но тогда утверждения а) и в) следуют из предложения 2.

Обозначим через dg меру Хаара на группе G с полной массой 1.

Лемма 1. *Пусть W^G — подпространство в W, состоящее из элементов, инвариантных относительно G. Эндоморфизм $\int_G \rho(g)\,dg$ пространства W есть проектор на подпространство W^G, перестановочный с действием группы G. В частности,*

$$\dim W^G = \int_G \operatorname{Tr} \rho(g)\,dg.$$

Положим $p = \int_G \rho(g)\,dg$; тогда для любого $h \in G$

$$\rho(h)\circ p = \int_G \rho(hg)\,dg = \int_G \rho(g)\,dg = p,$$

и аналогично $p\circ\rho(h) = p$. Таким образом, эндоморфизм p перестановочен с действием группы G, и его образ содержится в W^G. Если $w \in W^G$, то $p(w) = \int_G \rho(g)\,w\,dg = w$, что доказывает лемму.

Лемма 2. *Пусть u — эндоморфизм конечномерного векторного пространства E над полем K. Тогда*

$$\operatorname{Tr} u^2 = \operatorname{Tr} \mathsf{S}^2(u) - \operatorname{Tr} \textstyle\bigwedge^2(u).$$

Пусть $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$ — разложение на линейные множители характеристического многочлена эндоморфизма u в подходящем расширении поля K. Тогда

$$\operatorname{Tr} u^2 = \sum_i \alpha_i^2,\ \operatorname{Tr} \textstyle\bigwedge^2(u) = \sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j,\ \operatorname{Tr} \mathsf{S}^2(u) = \sum_{i\leqslant j} \alpha_i\alpha_j$$

(см. *Alg.*, chap. VII, p. 37, cor. 3), что завершает доказательство.

Предложение 4. *Предположим, что представление ρ неприводимо. Для того чтобы ρ было вещественного* (соотв. *комплексного*, соотв. *кватернионного*) *типа, необходимо и достаточно, чтобы интеграл $\int_G \operatorname{Tr}\rho(g^2)\,dg$ был равен* 1 (соотв. 0, соотв. -1).

Обозначим через $\check{\rho}$ представление, контрагредиентное к представлению ρ в пространстве W^* (определяемое равенством $\check{\rho}(g) = {}^t\rho(g^{-1})$).

Применяя лемму 2 к представлению $\check{\rho}(g)$ и интегрируя по группе G, получаем

$$\int_G \operatorname{Tr} \rho(g^2)\, dg = \int_G \operatorname{Tr} {}^t\rho(g^{-2})\, dg = \int_G \operatorname{Tr} \mathsf{S}^2(\check{\rho}(g))\, dg - \int_G \operatorname{Tr} \textstyle\bigwedge^2 (\check{\rho}(g))\, dg,$$

откуда ввиду леммы 1

$$\int_G \operatorname{Tr} \rho(g^2)\, dg = \dim (\mathsf{S}^2 W^*)^G - \dim (\textstyle\bigwedge^2 W^*)^G.$$

Но $\mathsf{S}^2 W^*$ (соотв. $\bigwedge^2 W^*$) отождествляется с пространством симметрических (соотв. знакопеременных) билинейных форм на W. Теперь предложение следует непосредственно из предложения 3.

УПРАЖНЕНИЯ

§ 1

1) Пусть G — связная коммутативная конечномерная *комплексная* группа Ли и V — ее алгебра Ли.

а) Отображение $\exp_G\colon V \to G$ является сюръективным гомоморфизмом; его ядро Γ — дискретная подгруппа в V.

б) G — компактна тогда и только тогда, когда Γ — решетка в V; в этом случае G называют *комплексным тором.*

в) Пусть Γ — дискретная подгруппа в $\mathbf{C}^2$, порожденная элементами $e_1=(1, 0)$, $e_2=(0, 1)$, $e_3=(\sqrt{2}, i)$; положим $G=\mathbf{C}^2/\Gamma$, $H=(\Gamma+\mathbf{C}e_1)/\Gamma$. Показать, что H изоморфна $\mathbf{C}^*$, что G/H — комплексный тор размерности 1, но G не содержит ненулевого комплексного тора.

г) Всякая связная конечномерная комплексная компактная группа Ли является комплексным тором (см. гл. III, § 6, n° 3, предложение 6).

2) Пусть H — множество комплексных чисел τ, для которых $\operatorname{Im}\tau>0$.

а) Показать, что формула $\gamma\tau=\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$ для $\tau\in H$ и $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\gamma\in\mathbf{SL}(2, \mathbf{Z})$ определяет левое аналитическое действие дискретной группы $\mathbf{SL}(2, \mathbf{Z})$ на H.

б) Для $\tau\in H$ обозначим через T_τ комплексный тор $\mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\tau\mathbf{Z})$. Показать, что отображение $\tau\mapsto T_\tau$ определяет при переходе к факторотображению биекцию множества $H/\mathbf{SL}(2, \mathbf{Z})$ на множество классов изоморфизма одномерных комплексных торов.

3) Пусть G — интегральная подгруппа в $\mathbf{O}(n)$, тождественное представление которой в $\mathbf{R}^n$ неприводимо. Доказать, что G замкнута (записать G в виде $K\times N$, где K компактна, а N коммутативна, и показать, что $\dim\bar{N}\leqslant 1$).

4) Показать, что эквивалентные условия из предложения 3 (n° 3) эквивалентны также каждому из следующих условий:

(ii′) Группа $\operatorname{Ad}(G)$ относительно компактна в $\operatorname{Aut}(L(G))$.

(ii″) Группа $\operatorname{Ad}(G)$ относительно компактна в $\operatorname{End}(L(G))$.

(v) В любой окрестности единичного элемента $e\in G$ содержится окрестность, инвариантная относительно внутренних автоморфизмов. (Ср. *Интегр.*, гл. VII, § 3, n° 1, предложение 1.)

5) Пусть A — замкнутая подгруппа в $\mathbf{GL}(3, \mathbf{R})$, состоящая из матриц (a_{ij}) со свойствами $a_{ij}=0$ при $i>j$, $a_{ii}=1$ для $1\leqslant i\leqslant 3$, $a_{12}\in\mathbf{Z}$, $a_{23}\in\mathbf{Z}$; пусть B — подгруппа в A, выделяемая условиями $a_{12}=a_{23}=0$, $a_{13}\in\pi\mathbf{Z}$, и пусть $G=A/B$.

а) Показать, что G — одномерная группа Ли с компактной алгеброй Ли.

б) Показать, что $C(G)=D(G)=G_0$ и что G_0 — максимальная компактная подгруппа в G.

в) Показать, что G не является полупрямым произведением G_0 на некоторую подгруппу.

6) Показать, что для компактности (вещественной) алгебры Ли необходимо и достаточно существование такого базиса (e_λ), $\lambda\in L$, для которого структурные константы $\gamma_{\lambda\mu\nu}$ антисимметричны по индексам λ, μ, ν (т. е. $\gamma_{\lambda\mu\nu}=-\gamma_{\mu\lambda\nu}=-\gamma_{\lambda\nu\mu}$).

7) *Инволютивной алгеброй Ли* называется (вещественная) алгебра Ли $\mathfrak{g}$, снабженная автоморфизмом s, обладающим свойством $s \circ s = 1_{\mathfrak{g}}$. Обозначим через $\mathfrak{g}^+$ (соотв. $\mathfrak{g}^-$) собственное подпространство для s в $\mathfrak{g}$ с собственным значением $+1$ (соотв. -1).

а) Показать, что $\mathfrak{g}^+$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, а $\mathfrak{g}^-$ является $\mathfrak{g}^+$-модулем; справедливо включение $[\mathfrak{g}^-, \mathfrak{g}^-] \subset \mathfrak{g}^+$, и пространства $\mathfrak{g}^+$ и $\mathfrak{g}^-$ ортогональны относительно формы Киллинга.

б) Показать, что следующие условия эквивалентны:

(i) $\mathfrak{g}^+$-модуль $\mathfrak{g}^-$ прост;

(ii) $\mathfrak{g}^+$ — максимальная подалгебра в $\mathfrak{g}$, отличная от $\mathfrak{g}$.

Если эти условия выполнены и если алгебра Ли $\mathfrak{g}^+$ не содержит никакого ненулевого идеала алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то говорят, что инволютивная алгебра Ли $(\mathfrak{g}, s)$ *неприводима*.

в) Предположим, что $\mathfrak{g}$ полупроста. Показать, что следующие условия эквивалентны:

(i) единственными идеалами в $\mathfrak{g}$, устойчивыми относительно s, являются $\{0\}$ и $\mathfrak{g}$;

(ii) $\mathfrak{g}$ либо проста, либо является суммой двух простых идеалов, переставляемых s.

Показать, что эти условия выполняются, когда $(\mathfrak{g}, s)$ неприводима (заметить, что $\mathfrak{g}$ является прямой суммой s-устойчивых идеалов, и проверить (ii)).

г) Предположим теперь, что $\mathfrak{g}$ полупроста и компактна. Показать, что инволютивная алгебра Ли $(\mathfrak{g}, s)$ неприводима тогда и только тогда, когда s — нетождественное преобразование и $(\mathfrak{g}, s)$ удовлетворяет условиям пункта в) (пусть $\mathfrak{p}$ — подмодуль в $\mathfrak{g}^+$-модуле $\mathfrak{g}^-$ и $\mathfrak{q}$ — его ортогональное дополнение относительно формы Киллинга; заметить, что $[\mathfrak{p}, \mathfrak{q}] = 0$, и вывести отсюда, что $\mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ — идеал в $\mathfrak{g}$).

д) Доказать, что $\mathfrak{g}$ является прямой суммой семейства $(\mathfrak{g}_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ s-устойчивых идеалов, так что $\mathfrak{g}_0$ состоит из s-неподвижных точек, а $(\mathfrak{g}_i, s | \mathfrak{g}_i)$ — неприводимые инволютивные алгебры Ли при $1 \leqslant i \leqslant n$.

8) Пусть G — компактная полупростая группа Ли, u — ее автоморфизм порядка 2, K — связная компонента единицы в множестве неподвижных точек для u и X — многообразие G/K (в этом случае однородное пространство X называют *симметрическим*).

а) Показать, что если G почти проста, то K — максимальная связная замкнутая подгруппа в G, отличная от G; иначе говоря (гл. III, § 3, упражнение 8), действие G на X примитивно. В этом случае говорят, что симметрическое пространство X *неприводимо*.

б) Предположим, что многообразие X односвязно; показать, что оно тогда изоморфно произведению многообразий, каждое из которых изоморфно либо группе Ли, либо неприводимому симметрическому пространству.

9) Пусть $\mathfrak{a}$ — вещественная или комплексная алгебра Ли и G — компактная подгруппа в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{a})$. Показать, что $\mathfrak{a}$ обладает G-устойчивой подалгеброй Леви (гл. I, § 6, n° 8, определение 7) (свести к случаю, когда радикал $\mathfrak{a}$ коммутативен, и использовать *Интегр.*, гл. VII, § 3, n° 2, лемма 2).

§ 2

1) Пусть G — компактная связная группа Ли и g — ее элемент.

а) Показать, что существует целое число $n \geqslant 1$, такое, что централизатор $Z(g^n)$ связен (доказать, что для подходящего n замкнутая подгруппа, порожденная g^n, является тором).

б) Предположим, что размерность пространства $\operatorname{Ker}(\operatorname{Ad} g^n - 1)$ не зависит от n (при $n \geqslant 1$). Показать, что $Z(g)$ связен.

в) Если элемент g^n регулярен при всех $n \geqslant 1$, то $Z(g)$ связен.

2) Показать, что всякая связная комплексная группа Ли является полупрямым произведением своей производной группы на некоторый тор (если T — максимальный тор в G, заметить, что $T \cap D(G)$ является тором).

3) Пусть G — компактная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли и $\mathfrak{s}$ — подпространство в $\mathfrak{g}$, которое вместе с любыми тремя элементами x, y, z содержит $[x, [y, z]]$. Пусть $\mathscr{L}$ — совокупность коммутативных подалгебр в $\mathfrak{g}$, содержащихся в $\mathfrak{s}$. Показать, что связная компонента единицы стабилизатора $\mathfrak{s}$ в G действует транзитивно на множестве максимальных элементов в $\mathscr{L}$ (рассуждать, как в доказательстве теоремы 1).

4) Пусть G — связная компактная группа Ли, T — максимальный тор в G и S — подтор в T. Обозначим через Σ (соотв. F) стабилизатор (соотв. централизатор) S в $W_G(T)$.

а) Доказать, что группа $N_G(S)/Z_G(S)$ изоморфна Σ/F.

б) Пусть H — связная замкнутая подгруппа в G, в которой S является максимальным тором. Показать, что каждый элемент группы $W_H(S)$, рассматриваемый как автоморфизм S, является ограничением на S некоторого элемента из Σ.

5) Пусть G — связная компактная группа Ли и S — тор в G. Показать, что следующие условия равносильны:

(i) S содержится в единственном максимальном торе;

(ii) $Z_G(S)$ — максимальный тор;

(iii) S содержит регулярный элемент.

6) Пусть G — связная компактная группа Ли, T — максимальный тор в G, $\mathfrak{g}$ (соотв. $\mathfrak{t}$) — алгебра Ли группы G (соотв. T) и $i\colon \mathfrak{t} \to \mathfrak{g}$ — каноническое вложение. Показать, что отображение ${}^t i\colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{t}^*$ определяет после перехода к факторотображению гомеоморфизм $\mathfrak{g}^*/G$ на $\mathfrak{t}^*/W_G(T)$.

‖ 7) Пусть X и Y — два связных отделимых вещественных многообразия класса C^r $(1 \leqslant r \leqslant \omega)$ и размерности n; пусть $f\colon X \to Y$ — собственный морфизм класса C^r, снабженный ориентацией F (*Мн., Св. рез.*, 10.2.5).

а) Показать, что существует и единственно вещественное число d, для которого справедливо равенство $\int\limits_X f^* \alpha = d \int\limits_Y \alpha$ для любой скрученной (нечетной) дифференциальной формы α класса C^1 и степени n на Y с компактным носителем (использовать *Мн., Св. рез.*, 11.2.4).

б) Пусть $y \in Y$ такова, что f этален во всех точках $f^{-1}(y)$. Для $x \in f^{-1}(y)$ положим $\nu_x(f) = 1$ (соотв. $\nu_x(f) = -1$), если отображения F_x и f_x (*Мн., Св. рез.*, 10.2.5, пример *b*)) множества $\operatorname{Or}(T_x(X))$ в $\operatorname{Or}(T_y(Y))$ совпадают (соотв. противоположны). Доказать, что $d = \sum\limits_{x \in f^{-1}(y)} \nu_x(f)$, так что $d \in \mathbf{Z}$.

Число d называют *степенью* морфизма f и обозначают через $\deg f$. Если $X = Y$ и если X ориентируемо, в качестве F берут отображение, сохраняющее ориентацию X.

в) Если $\deg f \neq 0$, показать, что f сюръективен.

г) Если существует такая точка $x \in X$, что $f^{-1}(f(x)) = \{x\}$ и f этален в x, то f сюръективен.

8) Пусть G — связная компактная группа Ли и dg — нормированная мера Хаара на G.

а) Пусть $f\colon G \to G$ — морфизм многообразий; для $g \in G$ отождествим с помощью левого сдвига дифференциал $T_g(f)$ с линейным отображением $L(G)$ в $L(G)$. Доказать равенство

$$\deg f.\int_G \varphi(g)\,dg = \int_G \varphi(f(g)) \det T_g(f)\,dg$$

для любой функции φ, интегрируемой на G (с комплексными значениями), и равенство

$$\deg f = \int_G \det T_g(f)\,dg.$$

б) Пусть $\psi_k\colon G \to G$ — отображение, переводящее g в g^k. Доказать равенство

$$\deg \psi_k = \int_G \det(1 + \operatorname{Ad} g + \ldots + (\operatorname{Ad} g)^{k-1})\,dg.$$

в) Пусть T — максимальный тор в G и T_r — множество регулярных элементов в T. Показать, что $\exp_G^{-1}(T_r) \subset L(T)$ и $\psi_k^{-1}(T_r) \subset T_r$ для всех $k \geqslant 1$.

г) Показать, что $\deg \psi_k = k^{\dim(T)}$; вывести отсюда равенство

$$\int_G \det(1 + \operatorname{Ad} g + \ldots + (\operatorname{Ad} g)^{k-1})\,dg = k^{\dim(T)}.$$

9) Это упражнение посвящено другому доказательству теоремы 2. Пусть G — связная компактная группа Ли, T — максимальный тор в G и N — его нормализатор. Обозначим через $G \times^N T$ фактормногообразие $G \times T$ по действию группы N, определенному формулой $(g, t).n = (gn, n^{-1}tn)$ (*Мн., Св. рез.*, 6.5.1).

а) Показать, что морфизм $(g, t) \mapsto gtg^{-1}$ многообразия $G \times T$ в G определяет после перехода к факторотображению аналитический морфизм $f\colon G \times^N T \to G$.

б) Пусть θ — такой элемент T, степени которого плотны в T (*Общ. топ.*, 1969, гл. VII, § 1, n° 3, следствие 2). Показать, что $f^{-1}(\theta) = \{x\}$, где x — класс пары (e, θ) в $G \times^N T$, и что f этален в точке x.

в) Вывести из упражнения 7г), что f сюръективен, и получить отсюда другое доказательство теоремы 2.

10)* В этом упражнении используется следующий результат из алгебраической топологии (*формула Лефшеца* [1])): пусть X — конечномерное компактное многообразие и f — морфизм X в себя. Предположим, что множество F неподвижных точек для f (т. е. таких, что $f(x) = x$) конечно и что для всех $x \in F$ число $\delta(x) = \det(1 - T_x(f))$ отлично от нуля. Обозначим через $H^i(f)$ эндоморфизм линейного пространства $H^i(X, \mathbf{R})$, индуцированный отображением f (при $i \geqslant 0$). Тогда

$$\sum_{x \in F} \delta(x)/|\delta(x)| = \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i \operatorname{tr} H^i(f).$$

---

[1]) Доказательство см., например, в статье: Lefschetz S. Intersections and transformations of complexes and manifolds.— Trans. Amer. Math. Soc., v. 28, 1926, p. 1—49. (См. также: Дольд А. Лекции по алгебраической топологии.—М.: Мир, 1976.— *Ред.*)

Пусть G — связная компактная группа Ли и T — максимальный тор в G. Для $g \in G$ обозначим через $\tau(g)$ автоморфизм многообразия G/T, порожденный левым сдвигом на g.

а) Пусть t — такой элемент из T, что порожденная им подгруппа плотна в T. Показать, что неподвижными точками автоморфизма $\tau(t)$ являются классы nT для $n \in N_G(T)$. Вывести отсюда, что $(N_G(T): T) = \sum\limits_{i \geqslant 0} \dim_{\mathbf{R}} H^i(G/T, \mathbf{R})$.

б) Пусть g — произвольный элемент из G; показать, что множество неподвижных точек автоморфизма $\tau(g)$ непусто, и вывести отсюда еще одно доказательство теоремы 2.$_*$

11) Пусть G — компактная группа Ли. Говорят, что подгруппа S в G есть подгруппа *типа* (C), если она совпадает с замыканием некоторой циклической подгруппы и имеет конечный индекс в своем нормализаторе.

а) Пусть S — подгруппа типа (C); показать, что S_0 — максимальный тор в G_0 и что S является прямым произведением S_0 и некоторой конечной циклической подгруппы.

б) Доказать, что каждый элемент $g \in G$ содержится в некоторой подгруппе типа (C) (рассмотреть подгруппу, порожденную g и максимальным тором в $Z(g)_0$).

в) Пусть S — подгруппа типа (C) и s — такой элемент в S, что его степени плотны в S. Показать, что каждый элемент из sG_0 сопряжен с помощью $\operatorname{Int}(G_0)$ с элементом из sS_0 (использовать метод упражнения 10).

г) Обозначим через $p: G \to G/G_0$ естественную проекцию. Показать, что отображение $S \mapsto p(S)$ задает биекцию множества классов сопряженности подгрупп типа (C) в G на множество классов сопряженности циклических подгрупп в G/G_0.

д) Пусть S — подгруппа типа (C) в G; обозначим через S_ρ множество таких ее элементов, образ которых в S/S_0 порождает S/S_0. Показать, что два элемента из S_ρ, сопряженные в G, сопряжены в $N_G(S)$.

§ 3

1) Пусть G — компактная группа Ли размерности >0. Для того чтобы любая конечная коммутативная подгруппа в G была циклической, необходимо и достаточно, чтобы G была изоморфна либо $\mathbf{U}(1, \mathbf{C})$, либо $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$, либо нормализатору максимального тора в $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$.

2) Обозначим через K одно из тел $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$ и через n — целое число $\geqslant 1$. Снабдим пространство K_s^n обычной эрмитовой формой.

а) Показать, что $\mathbf{U}(n, K)$ — компактная вещественная группа Ли.

б) Доказать, что единичная сфера в K_s^n является (вещественным) однородным пространством Ли для группы $\mathbf{U}(n, K)$; стабилизатор точки изоморфен $\mathbf{U}(n-1, K)$.

в) Вывести отсюда, что группы $\mathbf{U}(n, \mathbf{C})$ и $\mathbf{U}(n, \mathbf{H})$ связны, а группа $\mathbf{O}(n, \mathbf{R})$ имеет две связные компоненты.

г) Показать, что группы $\mathbf{SO}(n, \mathbf{R})$ и $\mathbf{SU}(n, \mathbf{C})$ связны.

д) Показать, что группа $\mathbf{O}(n, \mathbf{R})$ (соотв. $\mathbf{U}(n, \mathbf{C})$) является полупрямым произведением $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (соотв. $\mathbf{T}$) на $\mathbf{SO}(n, \mathbf{R})$ (соотв. $\mathbf{SU}(n, \mathbf{C})$).

3) а) Показать, что алгеброй Ли вещественной группы Ли $\mathbf{U}(n, \mathbf{H})$ является множество матриц $x \in \mathbf{M}_n(\mathbf{H})$ со свойством ${}^t\bar{x} = -x$, снабженное скобкой $[x, y] = xy - yx$. Обозначим ее через $\mathfrak{u}(n, \mathbf{H})$.

б) Отождествим $\mathbf{C}$ с подполем $\mathbf{R}(i)$ в $\mathbf{H}$ и $\mathbf{C}^{2n}$ с $\mathbf{H}^n$ с помощью изоморфизма $(z_1, \ldots, z_{2n}) \mapsto (z_1 + jz_{n+1}, \ldots, z_n + jz_{2n})$. Доказать, что $\mathbf{U}(n, \mathbf{H}) = \mathbf{U}(2n, \mathbf{C}) \cap \mathbf{Sp}(2n, \mathbf{C})$.

в) Вывести из б), что всякая (вещественная) простая компактная алгебра Ли типа C_n изоморфна $\mathfrak{u}(n, \mathbf{H})$.

4) Пусть n — целое число $\geqslant 1$.

а) Показать, что группа $\mathbf{SU}(n, \mathbf{C})$ односвязна (использовать упражнение 2).

б) Показать, что центр группы $\mathbf{SU}(n, \mathbf{C})$ состоит из матриц вида $\lambda . I_n$, где $\lambda \in \mathbf{C}$, $\lambda^n = 1$.

в) Всякая почти простая компактная группа Ли типа A_n изоморфна фактор-группе группы $\mathbf{SU}(n+1, \mathbf{C})$ по циклической подгруппе, состоящей из матриц вида $\zeta^k . I_{n+1}$, $0 < k \leqslant d$, где d — делитель $n+1$, а ζ — примитивный корень степени d из единицы.

г) Доказать, что группа $\mathbf{SL}(n, \mathbf{C})$ односвязна (использовать гл. III, § 6, n° 9, теорема 6).

5) Для целого $n \geqslant 1$ через $\mathbf{Spin}(n, \mathbf{R})$ обозначается приведенная группа Клиффорда, ассоциированная с обычной квадратичной формой на $\mathbf{R}^n$ (*Алг.*, гл. IX, § 9, n° 5).

а) Показать, что $\mathbf{Spin}(n, \mathbf{R})$ — компактная группа Ли и что сюръективный гомоморфизм φ: $\mathbf{Spin}(n, \mathbf{R}) \to \mathbf{SO}(n, \mathbf{R})$ (см. *там же*) аналитичен и его ядро — это $\{+1, -1\}$.

б) Для $n > 2$ показать, что $\mathbf{Spin}(n, \mathbf{R})$ — связная и односвязная группа (использовать упражнение 2). Группа $\pi_1(\mathbf{SO}(n, \mathbf{R}))$ циклическая порядка 2.

в) Пусть Z_n — центр группы $\mathbf{Spin}(n, \mathbf{R})$. Показать, что при нечетном n $Z_n = \{1, -1\}$, а при четном $n > 2$ $Z_n = \{1, -1, \varepsilon, -\varepsilon\}$, где $\varepsilon = e_1 \ldots e_n$ — произведение элементов канонического базиса в $\mathbf{R}^n$; группа Z_{2r} изоморфна $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ (соотв. $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$), если r четно (соотв. нечетно).

г) Доказать, что всякая почти простая связная компактная группа Ли типа B_n $(n \geqslant 2)$ изоморфна либо $\mathbf{Spin}(2n+1, \mathbf{R})$, либо $\mathbf{SO}(2n+1, \mathbf{R})$.

д) Если r нечетно (соотв. четно) и $\geqslant 2$, то всякая почти простая связная компактная группа Ли типа D_r изоморфна либо $\mathbf{Spin}(2r, \mathbf{R})$, либо $\mathbf{SO}(2r, \mathbf{R})$, либо $\mathbf{SO}(2r, \mathbf{R})/\{\pm I_{2r}\}$ (соотв. либо одной из перечисленных групп, либо $\mathbf{Spin}(2r, \mathbf{R})/\{1, \varepsilon\}$).

6) а) Показать, что компактная группа Ли $\mathbf{U}(n, \mathbf{H})$ связна и односвязна (использовать упражнение 2) и ее центр есть $\{\pm I_n\}$.

б) Всякая почти простая связная компактная группа Ли типа C_n $(n \geqslant 3)$ изоморфна либо $\mathbf{U}(n, \mathbf{H})$, либо $\mathbf{U}(n, \mathbf{H})/\{\pm I_n\}$.

7) Пусть A — алгебра октонионов (называемых также октавами или числами Кэли; *Alg.*, chap. III, p. 176) с каноническим базисом $(e_i)_{0 \leqslant i \leqslant 7}$ (см. *там же*). Обозначим через V пространство чисто мнимых октонионов, порожденное векторами $e_1, \ldots, e_7$, и через E подпространство V, натянутое на векторы $e_1, e_2, e_3, e_5, e_6, e_7$. Отождествим с полем комплексных чисел $\mathbf{C}$ подалгебру в A, порожденную e_0 и e_4, и пусть G означает группу автоморфизмов алгебры A.

а) Обозначим через Q квадратичную форму на V, индуцируемую нормой Кэли, так что $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 7}$ — ортонормированный базис в V. Доказать, что отображение $\sigma \mapsto \sigma | V$ является инъективным гомоморфизмом G в группу $\mathbf{SO}(Q)$, изоморфную $\mathbf{SO}(7, \mathbf{R})$.

б) Показать, что умножение в алгебре A снабжает E структурой трехмерного комплексного пространства с базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$. Обозначим через Φ эрмитову форму на E, относительно которой этот базис ортонормирован. Пусть H — стабилизатор e_4 в G. Показать, что отображение $\sigma \mapsto \sigma | E$ является изоморфизмом H на группу $\mathbf{SU}(\Phi)$, изоморфную $\mathbf{SU}(3, \mathbf{C})$. Отображение $\sigma \mapsto \sigma(e_4)$ задает вложение G/H в V, образом которого является сфера $\mathbf{S}_6$.

в) Пусть T — тор в H, состоящий из таких автоморфизмов σ, для которых

$\sigma(e_0)=e_0$, $\sigma(e_1)=\alpha e_1$, $\sigma(e_2)=\beta e_2$, $\sigma(e_3)=\gamma e_3$, $\sigma(e_4)=e_4$, $\sigma(e_5)=\bar{\alpha}e_5$, $\sigma(e_6)=\bar{\beta}e_6$, $\sigma(e_7)=\bar{\gamma}e_7$, где α, β, γ — три комплексных числа, равных 1 по модулю и связанных равенством $\alpha\beta\gamma=1$. Пусть N — нормализатор T в G; показать, что N/T имеет порядок 12 (заметить, что каждый элемент из N должен сохранять множество $\pm e_i$, $i\neq\neq 0$); вывести отсюда, что ранг G равен 2.

г) Показать, что G — связная полупростая группа типа G_2 и что G/H отождествляется с $\mathbf{S}_6$ (показать, что $G_0\neq H$; вывести отсюда, что G_0 — группа типа G_2, затем использовать соображения размерности). Всякая компактная группа типа G_2 изоморфна G.

8) Пусть G — почти простая связная компактная группа Ли типа A_n, B_n, C_n, D_n или G_2. Доказать, что $\pi_2(G)=0$, а $\pi_3(G)=\mathbf{Z}$ (использовать упражнения 2—7 и тот факт, что $\pi_i(S_n)$ — тривиальная группа при $i<n$ и циклическая при $i=n$, ср. *Top. gen.*, chap. XI).

9) Пусть $\mathfrak{g}$ — компактная алгебра Ли и $\mathfrak{t}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$; пусть $(X_\alpha)_{\alpha\in R}$ — такая система Шевалле в расщепленной редуктивной алгебре Ли $(\mathfrak{g}_\mathbf{C}, \mathfrak{t}_\mathbf{C})$, что X_α и $X_{-\alpha}$ сопряжены (относительно $\mathfrak{g}$) для всех $\alpha\in R$.

а) Пусть $\mathscr{T}$ — подмодуль $\mathbf{Z}$-модуля $\mathfrak{t}_\mathbf{C}$, содержащий iH_α $(\alpha\in R)$ и такой, что $\alpha(\mathscr{T})\subset\mathbf{Z}i$ для всех $\alpha\in R$. Показать, что подмодуль $\mathscr{G}$ $\mathbf{Z}$-модуля $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$, порожденный $\mathscr{T}$ и элементами u_α, v_α $(\alpha\in R)$, является $\mathbf{Z}$-подалгеброй Ли в $\mathfrak{g}$.

б) Предположим, что $\mathfrak{g}$ (соотв. $\mathfrak{t}$) — алгебра Ли компактной группы G (соотв. максимального тора T в G). Пусть $\Gamma(T)$ — ядро гомоморфизма $\exp_T\colon \mathfrak{t}\to T$. Показать, что $\mathbf{Z}$-модуль $(2\pi)^{-1}\,\Gamma(T)$ удовлетворяет условиям пункта а).

в) Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — инвариантное скалярное произведение на $\mathfrak{g}$; пусть μ (соотв. τ) — мера Хаара на $\mathfrak{g}$ (соотв. $\mathfrak{t}$), соответствующая мере Лебега при отождествлении $\mathfrak{g}$ (соотв. $\mathfrak{t}$) с пространством $\mathbf{R}^n$ с помощью ортонормированного базиса. Обозначим тем же символом μ (соотв. τ) меру на $\mathfrak{g}/\mathscr{G}$ (соотв. $\mathfrak{t}/\mathscr{T}$), которая является фактормерой меры μ (соотв. τ) по нормализованной мере Хаара на $\mathscr{G}$ (соотв. $\mathscr{T}$). Доказать формулу $\mu(\mathfrak{g}/\mathscr{G})=\tau(\mathfrak{t}/\mathscr{T})\prod\limits_{\alpha\in R_+}\langle iH_\alpha, iH_\alpha\rangle$.

§ 4

1) Пусть G означает одну из групп $\mathbf{SU}(n,\mathbf{C})$ или $\mathbf{U}(n,\mathbf{H})$; отождествим $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$ с $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$ или $\mathfrak{sp}(2n,\mathbf{C})$ соответственно, ср. § 3, n° 4 и упражнение 3. Используем обозначения из гл. VIII, § 13, n° 1 и n° 3 с $k=\mathbf{C}$.

а) Показать, что подгруппа T в G, состоящая из диагональных матриц с комплексными коэффициентами, является максимальным тором и что $L(T)_{(\mathbf{C})}=\mathfrak{h}$.

б) Отождествим $X(T)$ с подгруппой в $\mathfrak{h}^*$ с помощью гомоморфизма δ. Показать, что линейные функционалы ε_i и фундаментальные веса ϖ_j принадлежат $X(T)$. Если $t=\operatorname{diag}(t_1,\ldots,t_n)\in T$, то $\varepsilon_i(t)=t_i$ и $\varpi_j(t)=t_1\ldots t_j$ для $1\leqslant i, j\leqslant n$.

с) Вывести из б) другое доказательство того факта, что группы $\mathbf{SU}(n,\mathbf{C})$ и $\mathbf{U}(n,\mathbf{H})$ односвязны (ср. § 3, упражнения 4 и 6).

2) Пусть $G=\mathbf{SO}(n,\mathbf{R})$, $n\geqslant 3$; положим $n=2l+1$, если n нечетно, и $n=2l$, если n четно. Алгебра $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$ отождествляется с $\mathfrak{o}(n,\mathbf{C})$; используем обозначения из гл. VIII, § 13, nn° 2 и 4. Обозначим через $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ канонический базис в $\mathbf{R}^n$. Положим $e_j=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(f_{2j-1}+if_{2j})$ и $e_{-j}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(f_{2j-1}-if_{2j})$ для $1\leqslant j\leqslant l$, $e_0=i\sqrt{2}\,f_{2l+1}$ при нечетном n; в пространстве $\mathbf{C}^n$ выберем базис Витта $e_1,\ldots,e_l,e_{-l},\ldots,e_{-1}$, если n четно (соотв. $e_1,\ldots,e_l,e_0,e_{-l},\ldots,e_{-1}$, если n нечетно).

а) Пусть H_i — подпространство в $\mathbf{R}^n$, порожденное f_{2i-1} и f_{2i} $(1 \leqslant i \leqslant l)$; показать, что подгруппа в G, образованная такими элементами g, что $g(H_i) \subset H_i$ и $\det(g \mid H_i) = 1$ для $1 \leqslant i \leqslant l$, является максимальным тором T в G, и что $L(T)_{(\mathbf{C})} = \mathfrak{h}$.

б) Отождествим $\mathrm{X}(T)$ с подгруппой в $\mathfrak{h}^*$ с помощью δ. Показать, что линейные функционалы ε_i принадлежат $\mathrm{X}(T)$; если $t \in T$ и если ограничение t на H_j является поворотом на угол θ_j, то $\varepsilon_j(t) = e^{i\theta_j}$. Веса $\varpi_1, \ldots, \varpi_{l-2}, 2\varpi_{l-1}, 2\varpi_l, \varpi_{l-1} \pm \varpi_l$ принадлежат $\mathrm{X}(T)$. Если n нечетно, ϖ_{l-1} принадлежит $\mathrm{X}(T)$.

в) Пусть $\tilde{G} = \mathbf{Spin}(n, \mathbf{R})$ и $\varphi\colon \tilde{G} \to G$ — каноническое накрытие. Для $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_l) \in \mathbf{R}^l$ положим $t(\theta) = \prod_{i=1}^{l} (\cos\theta_i - f_{2i-1} f_{2i} \sin\theta_i) \in \tilde{G}$. Показать, что множество элементов $t(\theta)$ для $\theta \in \mathbf{R}^l$ является максимальным тором $\tilde{T}$ в $\tilde{G}$ и что $\varphi(\tilde{T}) = T$. При отождествлении $\mathrm{X}(\tilde{T})$ с подгруппой в $\mathfrak{h}^*$ имеем $\varepsilon_j(t(\theta)) = e^{2i\theta_j}$.

г) Показать, что веса ϖ_{l-1} и ϖ_l принадлежат $\mathrm{X}(\tilde{T})$; вывести отсюда, что $\mathbf{Spin}(n, \mathbf{R})$ — односвязная группа (ср. § 3, упражнение 5).

3) а) Показать, что автоморфизм $\sigma\colon A \mapsto \bar{A}$ группы $\mathbf{SU}(n, \mathbf{C})$ при $n \geqslant 3$ не является внутренним. Всякий не внутренний автоморфизм $\mathbf{SU}(n, \mathbf{C})$ имеет вид $\mathrm{Int}(g) \circ \sigma$, $g \in \mathbf{SU}(n, \mathbf{C})$.

б) Показать, что для всякой почти простой связной компактной группы G типа A_n $(n \geqslant 2)$ группа $\mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Int}(G)$ циклическая порядка 2 (ср. § 3, упражнение 4).

4) Пусть n — целое число $\geqslant 2$.

а) Пусть $g \in \mathbf{O}(2n, \mathbf{R})$ и $\det g = -1$; показать, что автоморфизм $\mathrm{Int}(g)$ группы $\mathbf{O}(2n, \mathbf{R})$ задает автоморфизм $\mathbf{SO}(2n, \mathbf{R})$, который не является внутренним.

б) Для $n \geqslant 2$ группа $\mathrm{Aut}(\mathbf{SO}(2n, \mathbf{R}))$ совпадает с группой $\mathrm{Int}(\mathbf{O}(2n, \mathbf{R}))$ (изоморфной $\mathbf{O}(2n, \mathbf{R})/\{\pm I_{2n}\}$).

в) Установить аналогичный результат для $\mathbf{Spin}(2n, \mathbf{R})$ и $\mathbf{SO}(2n, \mathbf{R})/\{\pm I_{2n}\}$. Если n четно и не равно 2, всякий автоморфизм группы $\mathbf{Spin}(2n, \mathbf{R})/\{1, \varepsilon\}$ (§ 3, упражнение 5) является внутренним.

5) Пусть R — неприводимая приведенная система корней.

а) Показать, что совокупность длинных корней в R замкнута, симметрична и устойчива относительно $W(R)$.

б) Показать, что всякое непустое подмножество P в R, замкнутое, симметричное и устойчивое относительно $W(R)$, совпадает либо с R, либо с подмножеством длинных корней.

в) Пусть $P \neq R$. Показать, что если R имеет тип B_l (соотв. C_l, F_4, G_2), то P имеет тип D_l (соотв. $(A_1)^l$, D_4, A_2).

6) Пусть H — замкнутая подгруппа в G, содержащая $N_G(T)$.

а) Показать, что H совпадает со своим нормализатором в G и что группа H/H_0 изоморфна $W/W_{H_0}(T)$.

б) Показать, что $R(H_0, T)$ устойчиво относительно W. Обратно, если K — связная замкнутая подгруппа, содержащая T и такая, что $R(K, T)$ устойчиво относительно W, то нормализатор K содержит $N_G(T)$.

в) Предположим, что G почти проста. Доказать, что H совпадает либо с $N_G(T)$, либо с G, за исключением следующих случаев:

α) (соотв. α')) $G = \mathbf{Spin}(2l+1, \mathbf{R})$ (соотв. $G = \mathbf{SO}(2l+1, \mathbf{R})$) и H_0 — стабилизатор ненулевого вектора в $\mathbf{R}^{2l+1}$, изоморфный $\mathbf{Spin}(2l, \mathbf{R})$ (соотв. $\mathbf{SO}(2l, \mathbf{R})$);

β) $G = \mathbf{U}(l, \mathbf{H})$ и $H_0 = D$ — подгруппа диагональных матриц;

β') $G = \mathbf{U}(l, \mathbf{H})/\{\pm 1\}$ и $H_0 = D/\{\pm 1\}$;

γ) G — группа типа F_4 и H_0 изоморфна $\mathbf{Spin}(8, \mathbf{R})$;

б) G — группа типа G_2 и H_0 — подгруппа (изоморфная $\mathbf{SU}(3, \mathbf{C})$), определенная в упражнении 7 к § 3.

7) Пусть $\tau: G \to \mathbf{GL}(V)$ — непрерывное представление G в конечномерном вещественном пространстве. Предположим, что $\dim_{\mathbf{C}} \tilde{V}_\lambda \leqslant 1$ для любого $\lambda \in \mathrm{X}(T)$.

а) Показать, что представление τ является прямой суммой конечного набора $(\tau_i)_{1 \leqslant i \leqslant s}$ неприводимых попарно неизоморфных представлений, коммутанты K_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ которых изоморфны $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$.

б) Для того чтобы на V существовала структура комплексного векторного пространства, относительно которой операторы из $\tau(G)$ были бы $\mathbf{C}$-линейны, необходимо и достаточно, чтобы $K_1, \ldots, K_s$ были изоморфны $\mathbf{C}$; в этом случае имеется 2^s таких структур.

8) Пусть H — связная замкнутая подгруппа максимального ранга в G, $\mathfrak{h}$ — ее алгебра Ли, X — многообразие G/H и V — касательное пространство к X в точке, соответствующей смежному классу H; отождествим V с факторпространством $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

а) Пусть j — почти комплексная структура на X (*Мн.*, *Св. рез.*, 8.8.3); обозначим через $V''(j)$ подпространство в $\mathbf{C} \otimes V$, образованное элементами u со свойством $j(u) = -iu$, и через $\mathfrak{q}(j)$ — прообраз $V''(j)$ в $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ так, чтобы каноническое отображение $V \to \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{q}(j)$ было $\mathbf{C}$-линейным изоморфизмом (при условии, что V снабжается комплексной структурой, соответствующей j). Доказать, что отображение $j \mapsto \mathfrak{q}(j)$ является биекцией множества почти комплексных структур на X, инвариантных относительно G, на множество комплексных подпространств $\mathfrak{p}$ в $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\mathfrak{p} + \bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \tag{1}$$

$$\mathfrak{p} \cap \bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{h}_{\mathbf{C}}, \tag{2}$$

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}. \tag{3}$$

б) Для того чтобы такая структура на X существовала, необходимо и достаточно, чтобы все коммутанты неприводимых подпредставлений присоединенного представления H в V были изоморфны $\mathbf{C}$; при этом условии имеется 2^s таких структур, где s — число неприводимых подпредставлений в V (использовать упражнение 7).

в) Пусть j — почти комплексная структура на X, инвариантная относительно G, и $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}(j)$ — соответствующее подпространство. Для того чтобы j была *интегрируемой* (т. е. соответствовала структуре комплексно-аналитического многообразия на X, ср. *Мн.*, *Св. рез.*, 8.8.5—8.8.8), необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{p}$ удовлетворяло условию

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}. \tag{4}$$

г) Для того чтобы на X существовала комплексная (т. е. интегрируемая почти комплексная) структура, инвариантная относительно G, необходимо и достаточно, чтобы подгруппа H была централизатором некоторого тора в G (показать, что из приведенных выше условий (1)—(4) вытекает, что $\mathfrak{p}$ — параболическая подалгебра в $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ (гл. VIII, § 3, n° 5)); эти комплексные структуры взаимно однозначно соответствуют параболическим подалгебрам $\mathfrak{p}$ в $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, которые являются прямой суммой $\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}$ и своего нильпотентного радикала (гл. VIII, § 3, n° 4).

д) Доказать, что существует в точности $\mathrm{Card}(W)$ комплексных структур на G/T, инвариантных относительно G; если σ и σ' — две такие структуры, то существует единственный элемент $w \in W$, для которого каноническое действие w на G/T

(с помощью внутреннего автоморфизма) переводит σ в σ'. Если w — неединичный элемент из W, то действие w на G/T не является $\mathbf{C}$-аналитическим ни для какой комплексной структуры на G/T, инвариантной относительно G.

е) Определить комплексные структуры на $\mathbf{S}^2$, инвариантные относительно $\mathbf{SO}(3, \mathbf{R})$.

ж)* В обозначениях упражнения 8г) пусть $G_{\mathbf{C}}$ — комплексификация G и P — комплексная подгруппа Ли в $G_{\mathbf{C}}$ с алгеброй Ли $\mathfrak{p}$. Показать, что каноническое отображение $G/H \to G_{\mathbf{C}}/P$ является изоморфизмом комплексно-аналитических многообразий.*

9) Пусть H — связная замкнутая подгруппа максимального ранга в G, отличная от G и максимальная среди подгрупп с такими свойствами. Обозначим через Z факторгруппу $C(H)/C(G)$.

а) $\dim Z \leqslant 1$; если $\dim Z = 0$, то Z имеет порядок 2, 3 или 5 (свести к случаю почти простой группы G с тривиальным центром; применить гл. VI, § 4, упражнение 4).

б) Предположим, что G почти проста и Z имеет порядок 3 или 5; положим $z = \operatorname{Card} Z$ и $\pi = \operatorname{Card}(\pi_1(H))/\operatorname{Card}(\pi_1(G))$. Показать, что возможны лишь следующие семь случаев:

(i) G — типа G_2, H — типа A_2, $z=3$, $\pi=1$;

(ii) G — типа F_4, H — типа $A_2 \times A_2$, $z=\pi=3$;

(iii) G — типа E_6, H — типа $A_2 \times A_2 \times A_2$, $z=\pi=3$;

(iv) G — типа E_7, H — типа $A_2 \times A_5$, $z=\pi=3$;

(v) G — типа E_8, H — типа A_8, $z=\pi=3$;

(vi) G — типа E_8, H — типа $A_2 \times A_6$, $z=\pi=3$;

(vii) G — типа E_8, H — типа $A_4 \times A_4$, $z=\pi=5$.

(Использовать то же упражнение и таблицы из гл. VI; для вычисления π заметить, что если f и f' означают индексы связности G и H соответственно, то $z\pi f = f'$.)

в) В каждом из предыдущих случаев определить группу H.

10) Сохраним обозначения предыдущего упражнения.

а) Предположим, что $\dim Z = 1$. Тогда на G/H есть ровно две G-инвариантные комплексные структуры; существует автоморфизм группы G, сохраняющий H и переводящий одну из этих структур в другую (использовать упражнение 8).

б) Определить комплексные структуры на $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$, инвариантные относительно $\mathbf{SU}(n+1, \mathbf{C})$.

в) Предположим, что $\dim Z = 0$ и $\operatorname{Card} Z \neq 2$. Показать, что на G/H существует G-инвариантная почти комплексная структура (если z — элемент $C(H)$, не центральный в G, то $\operatorname{Int}(z)$ задает автоморфизм G/H нечетного порядка (упражнение 9); использовать упражнение 8 б)). Показать, что на G/H не существует G-инвариантной комплексной структуры (использовать упражнение 8г)).

г) На $\mathbf{S}_6$ не существует комплексной структуры, инвариантной относительно $\mathbf{SO}(7, \mathbf{R})$ (использовать упражнение 7 к § 3).

11) Сохраним обозначения упражнений 9 и 10.

а) Для того чтобы однородное пространство G/H было симметрическим (§ 1, упражнение 8), необходимо и достаточно, чтобы Z была порядка 2 или размерности 1. В этом случае симметрическое пространство G/H неприводимо (см. *там же*).

б) Предположим, что $\dim Z = 1$; обозначим через X комплексно-аналитическое многообразие G/H. Показать, что имеет место один из следующих случаев:

(i) G — типа A_l, а $D(H)$ — типа $A_{p-1} \times A_{l-p}$; X изоморфно грассманиану $\mathbf{G}_p(\mathbf{C}^{l+1})$;

(ii) G — типа B_l, а $D(H)$ — типа B_{l-1}; X изоморфно подмногообразию в $\mathbf{P}_{2l}(\mathbf{C})$, на котором обращается в нуль невырожденная квадратичная форма (*гладкая проективная квадрика*).

(ii′) G — типа D_l, а $D(H)$ — типа D_{l-1}; X изоморфно гладкой проективной квадрике в $\mathbf{P}_{2l-1}(\mathbf{C})$;

(iii) G — типа C_l, а $D(H)$ — типа A_{l-1}; X изоморфно подмногообразию в $\mathbf{G}_l(\mathbf{C}^{2l})$, образованному всеми максимальными изотропными подпространствами в $\mathbf{C}^{2l}$ относительно обычной знакопеременной билинейной формы в C^{2l}.

(iv) G — типа D_l, а $D(H)$ — типа A_{l-1}; X изоморфно подпространству в $\mathbf{G}_l(\mathbf{C}^{2l})$, образованному максимальными изотропными подпространствами в $\mathbf{C}^{2l}$ относительно обычной симметрической билинейной формы в $\mathbf{C}^{2l}$.

(v) G — типа E_6, а $D(H)$ — типа D_5.

(vi) G — типа E_7, а $D(H)$ — типа E_6.

в) Предположим, что $\operatorname{Card} Z=2$; перечислить возможные случаи. Если G — типа A_l, B_l, C_l или D_l, показать, что вещественное многообразие G/H изоморфно грассманову многообразию $\mathbf{G}_p(K^q)$, где $K=\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$.

¶ 12) Предположим, что G односвязна; для всех $\alpha\in R(G, T)$ положим $t_\alpha=\exp((^1/_2)K_\alpha)$. Положим $N=N_G(T)$ и обозначим через $\varphi\colon N\to W$ каноническое отображение. Пусть B — базис в $R(G, T)$; для каждого $\alpha\in B$ выберем элемент n_α из $(N\cap S_\alpha)-(T\cap S_\alpha)$.

а) Показать, что $\varphi(n_\alpha)=s_\alpha$ и $n_\alpha^2=t_\alpha$, откуда $n_\alpha^4=1$.

б) Пусть α и β — два различных элемента из B и $m_{\alpha\beta}$ — порядок элемента $s_\alpha s_\beta$ в W. Доказать, что

$$\begin{aligned} n_\alpha n_\beta &= n_\beta n_\alpha, && \text{если } m_{\alpha\beta}=2,\\ n_\alpha n_\beta n_\alpha &= n_\beta n_\alpha n_\beta, && \text{если } m_{\alpha\beta}=3,\\ (n_\alpha n_\beta)^2 &= (n_\beta n_\alpha)^2, && \text{если } m_{\alpha\beta}=4,\\ (n_\alpha n_\beta)^3 &= (n_\beta n_\alpha)^3, && \text{если } m_{\alpha\beta}=6 \end{aligned}$$

(если, например, $m_{\alpha\beta}=3$, то $(s_\alpha s_\beta)s_\alpha(s_\alpha s_\beta)^{-1}=s_\beta$ и $s_\alpha s_\beta(\alpha)=\beta$; показать, что $n_\alpha n_\beta n_\alpha n_\beta^{-1}n_\alpha^{-1}n_\beta^{-1}$ принадлежит S_β, и воспользоваться тем, что $S_\alpha\cap S_\beta\cap T=\{e\}$).

в) Вывести из б), что существует единственное сечение $\nu\colon W\to N$ отображения φ, для которого $\nu(s_\alpha)=n_\alpha$ и $\nu(ww')=\nu(w)\nu(w')$, если $l(ww')=l(w)+l(w')$ (через $l(w)$ обозначается длина w относительно системы образующих $(s_\alpha)_{\alpha\in B}$; ср. гл. IV, § 1, n° 5, предложение 5). Положим $n_w=\nu(w)$.

г) Пусть W^* — подгруппа в N, порожденная элементами n_α; показать, что $W^*\cap T$ является подгруппой T_2 в T, образованной элементами порядка $\leqslant 2$, и что W отождествляется с W^*/T_2.

д) Пусть $w\in W$ — элемент порядка 2; показать, что $n_w^2=\prod_{\alpha\in R_w} t_\alpha$, где R_w — множество тех положительных корней α, для которых $w(\alpha)<0$ (записать w в виде $s_{\alpha_1}\dots s_{\alpha_r}$, где $r=l(w)$ и $\alpha_i\in B$; применить в) и гл. VI, § 1, n° 6, следствие 2 к предложению 17).

е) Предположим, что G почти проста. Пусть c — преобразование Кокстера из W и h — число Кокстера группы W (гл. VI, § 1, n° 11). Показать, что $n_c^h=\prod_{\alpha\in R_+} t_\alpha$ (использовать в), д) и упражнение 2 из гл V, § 6).

13) а) Выберем базис B в $R(G, T)$ и обозначим через R_+ множество положи-

тельных корней в $R(G, T)$. Показать, что $z_G = \prod_{\alpha \in R_+} \exp((1/2) K_\alpha)$ — элемент из $C(G)$, не зависящий от выбора T и B; кроме того, $z_G^2 = e$.

б) Пусть H — другая связная компактная группа Ли. Тогда $z_{G \times H} = (z_G, z_H)$; если $f: G \to H$ — сюръективный морфизм групп Ли, то $f(z_G) = z_H$.

в) Положим $R = R(G, T)$; предположим, что G односвязна, так что $X(T)$ отождествляется с $P(R)$. Показать, что ядром гомоморфизма $\chi \mapsto \chi(z_G)$ группы $X(T)$ в $\{1, -1\}$ служит подгруппа $P'(R)$, определенная в упражнении 8 к гл. VI, § 1.

г) Если $G = \mathbf{SU}(n, \mathbf{C})$, то $z_G = (-1)^{n+1} I_n$;

если $G = \mathbf{SU}(n, \mathbf{H})$, то $z_G = -I_n$;

если $G = \mathbf{Spin}(n, \mathbf{R})$ и $n = 0, 1, 2, 7 \bmod 8$, то $z_G = 1$;

если $G = \mathbf{Spin}(n, \mathbf{R})$ и $n \equiv 3, 4, 5, 6 \bmod 8$, то $z_G = -1$;

если G — типа E_6, E_8, F_4 или G_2, то $z_G = e$;

если G — типа E_7 и односвязна, то z_G — единственный нетривиальный элемент $C(G)$.

(Использовать гл. VI, § 4, упражнение 5.)

14) Предположим, что группа G *почти проста*; обозначим через h число Кокстера для $R(G, T)$ (гл. VI, § 1, n° 11). Говорят, что $g \in G$ — *элемент Кокстера*, если существует такой максимальный тор S в G, что g принадлежит $N_G(S)$ и его класс в $W_G(S)$ является преобразованием Кокстера (см. *там же*).

а) Показать, что два элемента Кокстера сопряжены (рассуждать, как в доказательстве следствия к предложению 10, n° 5).

б) Элемент Кокстера g регулярен и обладает свойством $g^h = z_G$, где z_G — элемент $C(G)$, определенный в упражнении 13; в частности, g имеет порядок h или $2h$ в зависимости от того, равен или не равен e элемент z_G (использовать упражнение 12е)).

в) Для того чтобы $g \in G$ был элементом Кокстера, необходимо и достаточно, чтобы автоморфизм $\mathrm{Ad}\, g \otimes 1_{\mathbf{C}}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ удовлетворял эквивалентным условиям из гл. VIII, § 5, упражнение 5е).

г) Показать, что всякий регулярный элемент $g \in G$, обладающий свойством $g^h \in C(G)$, является элементом Кокстера; для $p < h$ не существует регулярных элементов k, для которых $k^p \in C(G)$.

15) Пусть H — связная замкнутая подгруппа в G. Говорят, что H является *сетью*, если она не содержится ни в какой связной замкнутой подгруппе максимального ранга в G, отличной от G.

а) Показать, что H является сетью тогда и только тогда, когда ее централизатор в G совпадает с $C(G)$. В частности, если H — сеть, то $C(H) = C(G) \cap H$.

б) В дальнейшем будем предполагать, что H — сеть. Показать, что для любого максимального тора S в H справедливо равенство $C(H) = S \cap C(G)$.

в) Пусть H' — связная замкнутая подгруппа в G, содержащая H. Показать, что $\mathrm{rg}\, H < \mathrm{rg}\, H'$, и вывести отсюда, что H является сетью в H'.

г) Пусть K — связная замкнутая подгруппа в H, которая является сетью в H и содержит регулярный элемент группы G. Показать, что K является сетью в G.

16) Пусть H — связная замкнутая подгруппа в G, для которой $T \cap H = S$ — максимальный тор в H. Пусть $\lambda \in R(H, S)$; обозначим через $R(\lambda)$ множество корней из $R(G, T)$, ограничение которых на S совпадает с λ.

а) Показать, что $R(\lambda)$ непусто.

б) Пусть $w \in W_H(S)$; показать, что существует элемент $\bar{w} \in W_G(T)$, для которого $R(w\lambda) = \bar{w}R(\lambda)$ (использовать упражнение 4 из § 2).

в) Пусть $P(\lambda)$ — пересечение с $R(G, T)$ подгруппы $X(T)$, порожденной $R(\lambda)$. Показать, что существует такая замкнутая подгруппа G_λ в G, содержащая T, что $P(\lambda) = R(G_\lambda, T)$. Вывести отсюда, что отражение $s_\lambda \in W_H(S)$ является ограничением на S произведения отражений s_α, $\alpha \in P(\lambda)$.

г) Показать, что узловой вектор $K_\lambda \in L(S)$, соответствующий λ, является целочисленной линейной комбинацией векторов K_α, $\alpha \in R(\lambda)$.

д) Пусть B_H — базис в $R(H, S)$. Показать, что $R(\lambda)$ содержится в подгруппе $X(T)$, порожденной объединением $R(\mu)$, $\mu \in B_H$ (показать, что множество корней $\lambda \in R(H, S)$, обладающих указанным свойством, устойчиво относительно s_μ для $\mu \in B_H$, используя в)).

¶ 17) Сохраним обозначения предыдущего упражнения; предположим, кроме того, что подгруппа H является *сетью* (упражнение 15).

а) Показать, что $R(G, T)$ содержится в подгруппе $X(T)$, порожденной объединением $R(\lambda)$ для $\lambda \in B_H$.

б) Пусть Δ — связная компонента единицы в подгруппе группы S, образованной теми $s \in S$, для которых $\lambda(s) = \mu(s)$ для всех λ, μ из B_H. Показать, что существует такой базис $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ в $R(G, T)$ и такое целое k, $0 \leqslant k \leqslant l-1$, что Δ является связной компонентой единицы множества тех $t \in T$, для которых

$$\alpha_1(t) = \ldots = \alpha_k(t) = 1, \quad \alpha_{k+1}(t) = \ldots = \alpha_l(t).$$

(Пусть x — такой элемент $L(S)$, для которого $\delta(\lambda)(x) = 2\pi i$ для всех $\lambda \in B_H$; вывести из а), что $\exp x \in C(G)$. Выбрать $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ таким образом, чтобы $i\delta(\alpha_j)(x)$ было нулем при $1 \leqslant j \leqslant k$ и меньше нуля при $k+1 \leqslant j \leqslant l$; показать, что тогда для $\lambda \in B_H$ каждый корень из $R(\lambda)$ имеет вид

$$\alpha_j + n_1\alpha_1 + \ldots + n_k\alpha_k,$$

где $j \geqslant k+1$ и $n_i \in \mathbf{N}$. Завершить доказательство, используя а).)

в) Показать, что число k не зависит от выбора торов S, T и базисов B_H, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$; оно равно рангу производной группы для $Z_G(\Delta)$.

18) Сохраним обозначения упражнений 16 и 17. Говорят, что H — *главная* подгруппа, если она является сетью и если подтор Δ содержит регулярный элемент (другими словами, если $k=0$).

а) Пусть K — связная замкнутая подгруппа в H. Показать, что для того, чтобы K была главной в G, необходимо и достаточно, чтобы K была главной в H, а H — главной в G (использовать упражнения 15в), г)).

б) Впредь будем предполагать, что H — главная подгруппа. Показать, что объединение $R(\mu)$ для $\mu \in B_H$ является базисом в $R(G, T)$.

в) Пусть $\alpha \in R(G, T)$. Доказать, что ограничение α на S является целым ненулевым кратным некоторого корня $\lambda \in R(H, S)$; корень α является суммой элементов из $R(\lambda)$ (показать, что след в $L(S)$ гиперплоскости $\delta(\alpha) = 0$ является стенкой в $L(S)$).

г) Пусть $\lambda \in R(H, S)$; показать, что узловой вектор K_λ является линейной комбинацией с целыми положительными коэффициентами элементов K_α для $\alpha \in R(\lambda)$ (ср. упражнение 16г) и гл. V, § 3, n° 5, лемма 6).

19) Сохраним обозначения упражнений 16—18; предположим, что H — главная подгруппа. Снабдим $X(T) \otimes \mathbf{R}$ (соотв. $X(S) \otimes \mathbf{R}$) скалярным произведением, инвариантным относительно $W_G(T)$ (соотв. $W_H(S)$). Пусть λ, μ — два корня из B_H.

а) Если λ и μ ортогональны, то множества $R(\lambda)$ и $R(\mu)$ ортогональны. Вывести отсюда, что если G почти проста, то этим свойством обладает и H.

б) Предположим в дальнейшем, что $n(\lambda, \mu) = -1$. Показать, что существует такое сюръективное отображение $u: R(\lambda) \to R(\mu)$, что для любого $\alpha \in R(\lambda)$ $u(\alpha)$ — единственный корень в $R(\mu)$, связанный с α (т. е. не ортогональный α); кроме того, $K_\mu = \sum\limits_{\beta \in R(\mu)} K_\beta$ и корни из $R(\mu)$ попарно ортогональны (записать K_λ и K_μ в виде линейных комбинаций K_α и сравнить коэффициенты).

в) Если $n(\mu, \lambda) = -1$, отображение u биективно и все пары связанных корней из $R(\lambda) \cup R(\mu)$ имеют вид $(\alpha, u(\alpha))$ для $\alpha \in R(\lambda)$.

г) Предположим, что $n(\mu, \lambda) = -2$; пусть $\beta \in R(\mu)$. Показать, что $u^{-1}(\beta)$ содержит один или два элемента; если $u^{-1}(\beta) = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, то корни α_i $(i = 1, 2)$ ортогональны остальным корням из $R(\lambda)$ и имеют ту же длину, что и β, если $u^{-1}(\beta) = \{\alpha\}$ и $\|\alpha\| = \|\beta\|$, то α связан с единственным корнем $\alpha' \in R(\lambda)$ той же длины, что и α, и $\{\alpha, \alpha'\}$ ортогонально к остальным корням из $R(\lambda)$; если $u^{-1}(\beta) = \{\alpha\}$ и $\|\alpha\| \neq \|\beta\|$, то α ортогонален остальным корням из $R(\lambda)$.

д) Изучить аналогично случай $n(\mu, \lambda) = -3$.

20) Предположим, что группа G почти проста; пусть H — главная подгруппа в G ранга $\geqslant 2$.

а) Показать, что H — полупростая группа типа B_h, C_h, F_4 или G_2 (использовать упражнение 19).

б) Предположим, что H имеет ранг $\geqslant 3$. Показать, что G — группа типа A_l, D_l, E_6, E_7 или E_8 (рассмотреть концевые вершины графа Дынкина системы $R(G, T)$ и применить упражнение 19).

в) Если $\operatorname{rg} H \geqslant 3$, показать, что имеет место один из следующих случаев:

G — типа A_{2l} $(l \geqslant 3)$ и H — типа B_l;
G — типа A_{2l-1} $(l \geqslant 3)$ и H — типа C_l;
G — типа D_l $(l \geqslant 4)$ и H — типа B_{l-1};
G — типа E_6 и H — типа F_4.

г) Если H — типа B_2, то G — типа A_3 или A_4.

д) Если H — типа G_2, то G — типа B_3, D_4 или A_6.

(По поводу более подробного описания ситуации см. § 5, упражнение 5.)

е) Пусть K — связная замкнутая подгруппа в G, содержащая H; показать, что либо $K = G$, либо $K = H$, либо, наконец, H — типа G_2, K — типа B_3, а G — типа D_4 или A_6.

21) а) Пусть H — связная замкнутая подгруппа ранга 1 в G. Показать, что следующие условия эквивалентны:

(i) H — главная подгруппа;

(ii) H — сеть и содержит регулярный элемент;

(iii) существует главная $\mathfrak{sl}_2$-тройка (x, h, y) в $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ (гл. VIII, § 11, n° 4), для которой

$$L(H)_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}x + \mathbf{C}h + \mathbf{C}y.$$

б) Показать, что G содержит главную подгруппу ранга 1 и что две такие подгруппы сопряжены (в обозначениях упражнения заметить, что $S = \Delta$).

в) Показать, что связная замкнутая подгруппа в G является главной тогда и только тогда, когда она содержит главную подгруппу ранга 1 в G (использовать упражнение 18а)).

22) Пусть H — главная подгруппа ранга 1 в G; пусть Γ — подгруппа в $\mathrm{Aut}(G)$, образованная такими автоморфизмами u, что $u(H)=H$. Показать, что $\mathrm{Aut}(G)=\Gamma\cdot\mathrm{Int}(G)$.

§ 5

1) Предположим, что G односвязна; назовем *альковом* в G подмножество вида $\exp A$, где A — альков некоторой подалгебры Картана в $\mathfrak{g}$.

а) Показать, что альковы в G образуют разбиение множества G_r.

б) Всякий альков в G содержится в единственном максимальном торе.

в) Показать, что альковы в G, содержащиеся в T, образуют разбиение множества T_r и что множество этих альковов является главным однородным пространством для W.

г) Каждый класс сопряженности регулярных элементов G имеет ровно одну точку в каждом алькове.

д) Пусть E — альков в G. Показать, что E — стягиваемое множество; если $\mathfrak{g}$ проста, E гомеоморфно открытому симплексу евклидова пространства.

2) а) Пусть E — односвязное топологическое пространство и $u\colon E\to G$ — такое непрерывное отображение, что $u(E)\subset G_r$. Показать, что u гомотопно (*Top. gen.*, chap. XI) постоянному отображению со значением e (рассмотреть накрытие $\varphi_r\colon (G/T)\times\mathfrak{t}_r\to G_r$; поднять u до отображения $\tilde{u}\colon E\to(G/T)\times\mathfrak{t}$, а затем использовать стягиваемость $\mathfrak{t}$).

*б) Доказать, что группа $\pi_2(G)$ тривиальна.

(Пусть $u\colon \mathbf{S}_2\to G$ — отображение класса C^∞; используя предложение 1 и теорему трансверсальности, показать, что u гомотопно отображению, образ которого содержится в G_r, а затем применить а).)$_*$

3) Пусть $f\colon \tilde{G}\to G$ — универсальное накрытие G и π — ядро f (изоморфное $\pi_1(G)$); положим $C=C(G)$ и $\tilde{C}=C(\tilde{G})$. Пусть σ — автоморфизм группы G и $\tilde{\sigma}$ — автоморфизм $\tilde{G}$, соответствующий σ. Обозначим через G_σ, C_σ, $\tilde{G}_\sigma$, $\tilde{C}_\sigma$ множества неподвижных точек в G, C, $\tilde{G}$, $\tilde{C}$ соответственно относительно σ, σ, $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}$.

а) Показать, что связная компонента единицы $(G_\sigma)_0$ в G_σ совпадает с $f(\tilde{G}_\sigma)$.

б) Обозначим через s эндоморфизм $\mathbf{Z}$-модуля π, индуцированный $\tilde{\sigma}$. Показать, что факторгруппа $G_\sigma/(G_\sigma)_0$ изоморфна подгруппе в $\mathrm{Coker}(1-s)$ и, в частности, коммутативна. Если отображение $1-s$ сюръективно, то G_σ связна.

в) Пусть $n\in\mathbf{N}$ таково, что $s^n=\mathrm{Id}_\pi$. Показать, что группа $G_\sigma/(G_\sigma)_0$ отождествляется с подгруппой факторгруппы $\mathrm{Ker}(1+s+\ldots+s^{n-1})/\mathrm{Im}(1-s)$; вывести отсюда, что она имеет показатель n. Если n взаимно просто с порядком подгруппы кручения в π, то G_σ связна.

г) Дать другой вывод результатов б) и в) с помощью *Alg.*, chap. X, p. 194, ex. 23.

д) Показать, что G_σ связна в каждом из следующих случаев:

(i) G полупроста типа A_{2n} $(n\geqslant 1)$ и σ не является внутренним.

(ii) G полупроста типа E_6 и σ не является внутренним.

(iii) G полупроста типа D_4 и σ — *автоморфизм тройственности* (т. е. порядка 3 по модулю $\mathrm{Int}(G)$).

е) Построить изоморфизм $C_\sigma/(C_\sigma\cap(G_\sigma)_0)$ на $((1-\tilde{\sigma})\tilde{C}\cap\pi)/(1-\tilde{\sigma})\pi$. Вывести отсюда, что если отображение $1-s$ не сюръективно и $\pi\subset(1-\tilde{\sigma})\tilde{C}$, то C_σ не содержится в $(G_\sigma)_0$. Для $G=\mathbf{SO}(2n,\mathbf{R})$ и не внутреннего σ имеем $-I_{2n}\notin(G_\sigma)_0$, и G_σ несвязна.

4) Предположим, что G полупроста. Пусть e — разметка в G и Φ — некоторая группа автоморфизмов группы G, сохраняющих разметку; обозначим через H подгруппу в G, образованную неподвижными точками для Φ.

а) Показать, что H_0 полупроста; если G односвязна, то H связна (свести к случаю, когда G почти проста, а Φ циклическая, и применить теорему 1 (n° 3) и гл. VIII, § 5, упражнение 13).

б) Предположим, что G почти проста. Показать, что
если G — типа A_{2l} $(l \geqslant 1)$ и Φ — порядка 2, то H_0 — типа B_l;
если G — типа A_{2l-1} $(l \geqslant 2)$ и Φ — порядка 2, то H_0 — типа C_l;
если G — типа D_l $(l \geqslant 4)$ и Φ — порядка 2, то H_0 — типа B_{l-1};
если G — типа D_4 и Φ — порядка 3 или 6, то H_0 — типа G_2;
если G — типа E_6 и Φ — порядка 2, то H_0 — типа F_4.
В каждом случае вычислить группы $\pi_i(H)$, $i=0, 1$ (ср. упражнение 3).

в) Доказать, что подгруппа H_0 — главная (§ 4, упражнение 18).

г) Доказать, что полупростая группа типа B_3 или A_6 содержит главную подгруппу типа G_2 (использовать б) и § 4, упражнение 20).

5) Предположим, что группа G почти проста; пусть H — связная замкнутая главная подгруппа в G (§ 4, упражнение 18). Обозначим через Φ группу автоморфизмов u группы G, сохраняющих H, и через F — подгруппу элементов G, неподвижных относительно Φ.

а) Показать, что существует разметка G, инвариантная относительно Φ.

б) Показать, что имеет место один из следующих случаев:
(i) $H = F_0$;
(ii) G — типа B_3, H — типа G_2 и Φ сводится к единице;
(iii) G — типа A_6, H — типа G_2 и Φ имеет порядок 2.
(Использовать упражнение 4 и упражнение 20 к § 4.)

¶ 6) Предположим, что G односвязна. Пусть p — простое число и g — элемент из $C(G)$ со свойством $g^p = e$.

а) Показать, что существуют такие элементы $u \in T$ и $w \in W$, что
(i) $w(u)\,u^{-1} = g$;
(ii) $w^p = 1$;
(iii) $u^p = e$, если $p \neq 2$; $u^p = e$ или g, если $p = 2$.

(Пусть A — альков в $\mathfrak{t}$; для $i = 0, 1, \ldots, p-1$ выберем $x_i \in \bar{A}$ так, что $\exp x_i = g^i$. Взять в качестве u элемент $\exp x$, где x — центр тяжести грани $\bar{A}$ с вершинами x_i, а в качестве w — такой элемент W, что $w(A) = A - x$.)

б) Доказать, что существуют такие $u \in T$ и $v \in N_G(T)$, что
(i) $vuv^{-1}\,u^{-1} = g$;
(ii) $v^p = e$, если $p \neq 2$, и $v^p = e$ или g, если $p = 2$;
(iii) $u^p = e$, если $p \neq 2$, и $u^p = e$ или g, если $p = 2$.
(Используя конструкцию а), поднять w до n_w, как в упражнении 12 к § 4; положить $v = n_w^{p+1}$, если $p \neq 2$, и $v = n_w$, если $p = 2$.)

7) Пусть p — простое число. Показать, что следующие условия эквивалентны:
(i) p не делит порядок подгруппы кручения в $\pi_1(G)$;
(ii) для каждого элемента $g \in G$ порядка p централизатор g в G связен;
(iii) всякая подгруппа в G, изоморфная $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2$, содержится в максимальном торе.

(Для доказательства (i)$\Rightarrow$(ii) использовать упражнение 3в), для доказательства (iii)$\Rightarrow$(i) использовать упражнение 6.)

8) Пусть $G = \mathbf{SO}(8, \mathbf{R})/\{\pm I_8\}$, обозначим через $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ такой базис в $R(G, T)$, что α_1, α_3 и α_4 не ортогональны α_2 (гл. VI, таблица IV). Пусть A — подгруппа в T, образованная такими $t \in T$, для которых

$$\alpha_1(t) = \alpha_3(t) = \alpha_4(t), \quad \alpha_1(t)^2 = \alpha_2(t)^2 = 1.$$

Показать, что A изоморфна $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ и что ее централизатор в G — конечная некоммутативная группа.

9) Пусть R — неприводимая система корней, $R^\vee$ — дуальная система, B — базис в R и α — наибольший корень в R (относительно B). Положим

$$\alpha = \sum_{\beta \in B} n_\beta \beta, \quad \alpha^\vee = \sum_{\beta \in B} n_\beta^\vee \beta^\vee,$$

пусть $\nu(R) = \sup\limits_{\beta \in B} n_\beta^\vee$.

а) Показать, что интервал $[1, \nu(R)]$ в $\mathbf{N}$ является объединением 1 и чисел $n_\beta^\vee$ для $\beta \in B$ (положим $\alpha_0 = \alpha$; пусть $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ — такая последовательность различных элементов из B, что α_i не ортогонален α_{i-1} при $i = 1, \ldots, q$, $n_{\alpha_q}^\vee = \nu(R)$ и q является максимальным с этими свойствами; показать, что $n_{\alpha_i}^\vee = i + 1$ для $i = 1, \ldots, q$).

б) Пусть p — простое число. Показать, что следующие три свойства эквивалентны:

(i) $p \leqslant \nu(R)$;

(ii) существует $\beta \in B$, для которого $p = n_\beta^\vee$;

(iii) существует $\beta \in B$, для которого p делит $n_\beta^\vee$.

В этом случае говорят, что p является *простым числом кручения* для R.

в) Для каждого типа неприводимых систем корней вычислить величину $\nu(R)$ и простые числа кручения. Показать, что множество чисел n_β и множество чисел $n_\beta^\vee$ совпадают во всех случаях, кроме G_2.

г) Пусть R' — замкнутое симметричное подмножество в R, неприводимое как система корней. Показать, что $\nu(R') \leqslant \nu(R)$.

10) Пусть R — система корней, p — простое число. Показать, что следующие свойства эквивалентны:

(i) p — простое число кручения для неприводимой компоненты R (упражнение 9б)).

(ii) существует замкнутое симметричное подмножество R_1 в R, отличное от R и максимальное с этими свойствами, для которого $(Q(R^\vee) : Q(R_1^\vee)) = p$ (через $Q(R^\vee)$ обозначается $\mathbf{Z}$-модуль, порожденный дуальными корнями для R, а через $Q(R_1^\vee)$ — подмодуль, порожденный корнями $\alpha^\vee$ для $\alpha \in R_1$);

(iii) существует замкнутое симметричное подмножество R_1 в R, для которого подмодуль p-кручений в $Q(R^\vee)/Q(R_1^\vee)$ отличен от нуля.

(Для доказательства (i)$\Rightarrow$(ii) использовать упражнение 4 из гл. VI, § 4; для доказательства (iii)$\Rightarrow$(i) использовать упражнение 9г).)

В этом случае говорят, что *p — простое число кручения для системы R*.

11) Пусть p — простое число. Говорят, что *p — простое число кручения* для G, если существует такая связная замкнутая подгруппа H максимального ранга в G, что подгруппа p-кручения в $\pi_1(H)$ нетривиальна. Положим $R = R(G, T)$.

а) Простые числа кручения для G являются простыми числами кручения для R (упражнение 10) и простыми делителями порядка подгруппы кручения группы $\pi_1(G)$.

б) Показать, что всякое простое число кручения для G делит $w/l!$, где w — порядок группы W, а l — ранг полупростой группы $D(G)$ (использовать гл. VI, § 2, n° 4, предложение 7).

в) Пусть $t \in T$ и $n \in \mathbf{N}$ таковы, что $t^n \in C(G)$. Пусть R_1 — множество тех $\alpha \in R$, для которых $\alpha(t)=1$, и m — порядок подгруппы кручения группы $Q(R^\vee)/Q(R_1^\vee)$ (ср. упражнение 10). Доказать, что каждый простой делитель m делит n (свести к случаю, когда G почти проста и односвязна).

г) Предположим, что G односвязна. Пусть $g \in G$ и $n \in \mathbf{N}$ таковы, что $g^n \in C(G)$ и никакое число кручения для G не делит n. Доказать, что производная группа централизатора g односвязна.

д) Пусть $g \in G$ и p — простое число, для которого $g^p = e$, не являющееся простым числом кручения для G. Показать, что централизатор $Z(g)$ связен и что p не является простым числом кручения для $Z(g)$.

е) Предположим, что G односвязна и p — простое число кручения для G. Доказать, что существует такой элемент g порядка p в G, что $\pi_1(Z(g))$ — циклическая группа порядка p (использовать упражнение 10 и упражнение 4 из гл. VI, § 4).

12) Пусть p — простое число. Показать, что следующие условия эквивалентны:

(i) p не является простым числом кручения для G;

(ii) для любой подгруппы F в G, изоморфной $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$ (для $n \in \mathbf{N}$), централизатор F в G связен;

(ii′) для любой подгруппы F в G, изоморфной $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2$, централизатор F в G связен;

(iii) всякая подгруппа в G, изоморфная $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$ для некоторого n, содержится в максимальном торе;

(iii′) всякая подгруппа в G, изоморфная $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^3$, содержится в максимальном торе.

(Для доказательства (i)$\Rightarrow$(ii) использовать упражнение 11д), для доказательства (iii)$\Rightarrow$(i) использовать упражнение 11е) и 7.)

§ 6

1) Пусть R — приведенная система корней в вещественном векторном пространстве V. Снабдим V скалярным произведением, инвариантным относительно $W(R)$, и продолжим это скалярное произведение естественным образом на $\mathsf{S}(V)$ (*EVT*, chap. V, p. 30); таким образом, для $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ из V справедливо равенство

$$(x_1 \ldots x_n | y_1 \ldots y_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (x_1 | y_{\sigma(1)}) \ldots (x_n | y_{\sigma(n)}).$$

Выберем камеру C для R; положим $N = \operatorname{Card}(R_+)$, $\rho = (1/2) \sum_{\alpha \in R_+} \alpha$ и $w(R) = \operatorname{Card} W(R)$. Пусть P означает элемент $\prod_{\alpha \in R_+} \alpha$ в $\mathsf{S}^N(V)$.

а) Показать, что $P = \dfrac{1}{N!} \sum_{w \in W(R)} \varepsilon(w)(w\rho)^N$ (ср. гл. VI, § 3, n° 3, предложение 2).

б) Вывести отсюда равенство $(P|P) = w(R) \prod_{\alpha \in R_+} (\rho|\alpha)$.

в) Доказать, что $(P|P) = 2^{-N} w(R) \prod_{i=1}^{l} m_i! \prod_{\alpha \in R_+} (\alpha|\alpha) = 2^{-N} \prod_{i=1}^{l} (m_i +$

$+1)!\prod\limits_{\alpha\in R_+}(\alpha|\alpha)$, где $m_1, \ldots, m_l$ — показатели $W(R)$ (использовать упражнение 3 из гл. VIII, § 9).

¶ 2) Пусть V — вещественное конечномерное гильбертово пространство. Снабдим пространство $\mathsf{S}(V^*)$ многочленов на V скалярным произведением, определенным в *EVT*, chap. V, p. 30 (ср. упражнение 1). Обозначим через γ каноническую гауссову меру на V (*Интегр.*, гл. IX, § 6, nn° 4—6); если $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ —ортонормированный базис в V^*, то $d\gamma(x)=(2\pi)^{-n/2}e^{-(x|x)/2}dx_1\ldots dx_n$.

а) Пусть q — элемент $\mathsf{S}^2(V)$, задающий скалярное произведение в V^*, и пусть $\Delta:\mathsf{S}(V^*)\to\mathsf{S}(V^*)$ — операция внутреннего умножения на q (*Alg.*, chap. III, p. 165). Показать, что для любого ортонормированного базиса $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ в V^* и любого многочлена $P\in\mathsf{S}(V^*)$ справедливо равенство $\Delta P=(1/2)\sum\limits_{i=1}^{n}\partial^2P/\partial x_i^2$.

б) Для $P\in\mathsf{S}(V^*)$ положим $P^*=P*\gamma$, так что $P^*(x)=\int\limits_V P(x-y)\,d\gamma(y)$ для $x\in V$. Доказать равенство

$$P^*=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta^n P}{n!}=e^{\Delta}P.$$

(Свести к доказательству аналогичного равенства для функции $x\mapsto e^{i(x|u)}$, где $u\in V$.)

в) Доказать формулу $\int\limits_V\overline{P^*(ix)}\,Q^*(ix)\,d\gamma(x)=(P|Q)$ для P, Q из пространства $\mathsf{S}(V^*)$ (отождествленного с подпространством в $\mathsf{S}_{\mathbf{C}}((V\otimes\mathbf{C})^*)$).

г) Если P — однородный многочлен на V, для которого $\Delta P=0$, то $\int\limits_V P(x)^2\,d\gamma(x)=(P|P)$.

д) Пусть W — конечная группа автоморфизмов V, порожденная отражениями; обозначим через H множество отражений W. Для $h\in H$ определим $e_h\in V$ и $f_h\in V^*$ так, что $h(x)=x+f_h(x)e_h$. Показать, что многочлен $P=\prod\limits_{h\in H}f_h$ обладает свойством $\Delta P=0$ (использовать гл. V, § 5, n° 4, предложение 5).

3) Пусть μ — мера Хаара на аддитивной группе $\mathfrak{g}$.

а) Существует единственная мера Хаара μ_G на G, обладающая следующим свойством: если ω_G и $\omega_{\mathfrak{g}}$ — инвариантные дифференциальные формы степени n на G и $\mathfrak{g}$ соответственно, для которых $\omega_G(e)=\omega_{\mathfrak{g}}(0)$ и $|\omega_{\mathfrak{g}}|=\mu$, то $|\omega_G|=\mu_G$. Отображение $\mu\mapsto\mu_G$ устанавливает биекцию множества мер Хаара на $\mathfrak{g}$ на аналогичное множество для G.

б) Выберем инвариантное скалярное произведение $(\ |\ )$ на $\mathfrak{g}$ и меру Хаара τ на $\mathfrak{t}$ так, что μ (соотв. τ) соответствуют мере Лебега при отождествлении $\mathfrak{g}$ с $\mathbf{R}^n$ (соотв. $\mathfrak{t}$ с $\mathbf{R}^r$) с помощью ортонормированного базиса. Доказать формулу

$$\int\limits_{\mathfrak{t}}\pi_{\mathfrak{g}}(x)\,e^{-(x|x)/2}\,d\tau(x)=(2\pi)^{n/2}\frac{\tau_T(T)}{\mu_G(G)}\,w(G).$$

в) Отождествим $X(T)$ с подмножеством гильбертова пространства $\mathfrak{t}^*$ с помощью отображения $(2\pi i)^{-1}\delta$ (§ 4, n° 2) и положим $P(x)=\prod_{\alpha\in R_+}\langle\alpha, x\rangle$ для $x\in\mathfrak{t}$. В обозначениях упражнений 1 и 2 показать, что

$$\frac{\tau_T(T)}{\mu_G(G)}=(2\pi)^N\,w(G)^{-1}(P|P)=\pi^N\prod_{\alpha\in R_+}(\alpha|\alpha)\prod_{i=1}^{l}m_i!$$

г) В обозначениях упражнения 9 к § 3 пусть $\mathfrak{g}_{\mathbf{Z}}$ — под-$\mathbf{Z}$-алгебра Ли в $\mathfrak{g}$, порожденная $(2\pi)^{-1}\Gamma(T)$ и элементами u_α, v_α для $\alpha\in R$. Доказать равенство

$$\mu_G(G)=\mu(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\mathbf{Z}})\frac{2^r\pi^{N+r}}{\prod_i m_i!}.$$

д) Предположим, что G односвязна. Показать, что $l=r$ и

$$\mu_G(G)=2^{l/2}\pi^{-N}f^{1/2}\prod_{\alpha\in R_+}(\alpha|\alpha)^{-1}\prod_{i=1}^{l}(\alpha_i|\alpha_i)^{-1/2}\prod_i(m_i!)^{-1},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ — базис в R, а f — индекс связности R.

е) Предположим, кроме того, что R неприводима и что все корни имеют одинаковую длину; в качестве скалярного произведения на $\mathfrak{g}$ выберем форму Киллинга с обратным знаком. Показать, что $\mu_G(G)=(2\pi)^{N+r}(2h)^{n/2}f^{1/2}\prod_i(m_i!)^{-1}$.

4) Пусть X — гладкое многообразие класса C^∞. В этом и следующих упражнениях обозначим просто через $H(X)$ градуированное $\mathbf{R}$-пространство $H(\Omega(X))$.

а) Показать, что $\Omega(X)$ — ассоциативная и антикоммутативная градуированная дифференциальная алгебра (*Alg.*, chap. X, p. 183, ex. 18). Вывести отсюда, что $H(X)$ обладает естественной структурой ассоциативной антикоммутативной градуированной алгебры.

б) Если X связно и имеет размерность p, то $H^i(X)=0$ при $i>p$ и $\dim_{\mathbf{R}} H^0(X)=1$. Если кроме того, X компактно и ориентируемо, то пространство $H^p(X)$ одномерно (использовать *Мн., Св. рез.*, 11.2.4).

в) Пусть Y — другое многообразие класса C^∞ и $f\colon X\to Y$ — морфизм класса C^∞. Отображение $f^*\colon\Omega(Y)\to\Omega(X)$ является морфизмом комплексов (*Мн., Св. рез.*, 8.3.5); показать, что $H(f^*)\colon H(Y)\to H(X)$ является морфизмом алгебр.

г) Предположим, что на X задано действие связной компактной группы G класса C^∞. Показать, что подкомплекс $\Omega(X)^G$ инвариантных форм является подалгеброй в $\Omega(X)$. Вывести отсюда, что отображение $H(i)\colon H(\Omega(X)^G)\to H(X)$, определенное в теореме 2, является изоморфизмом градуированных алгебр.

д) Показать, что $(\mathrm{Alt}\ (\mathfrak{g}))^G$ является подалгеброй в $\mathrm{Alt}\ (\mathfrak{g})$ и что она изоморфна градуированной алгебре $H(G)$.

5) Обозначим через $H(G)$ градуированную $\mathbf{R}$-алгебру $H(\Omega(G))$ (ср. упражнение 4).

а) Пространство $H^p(G)$ нулевое при $p>n$ и имеет размерность 1 при $p=0$ и $p=n$. Пространство $H^1(G)$ канонически отождествляется с $\mathfrak{c}^*$, где $\mathfrak{c}=L(C(G))$.

б) Предположим в дальнейшем, что G полупроста. Показать, что $H^1(G)=H^2(G)=0$ (ср. гл., I, § 6, упражнение 1).

в) Обозначим через $B(\mathfrak{g})$ пространство билинейных симметрических G-инвариантных форм на $\mathfrak{g}$; для $b\in B(\mathfrak{g})$ и $x, y, z\in\mathfrak{g}$ положим $\tilde{b}(x, y, z)=b([x, y], z)$. Показать, что отображение $b\mapsto\tilde{b}$ задает изоморфизм $B(\mathfrak{g})$ на $H^3(G)$ (пусть $\omega\in H^3(G)$; показать, что для любого $x\in\mathfrak{g}$ существует единственная линейная форма $f(x)$ на $\mathfrak{g}$, для которой $df(x)=i(x)\,\omega$, и рассмотреть форму $(x, y)\mapsto -\langle y, f(x)\rangle$).

г) Показать, что размерность линейного $\mathbf{R}$-пространства $H^3(G)$ равна числу простых идеалов в $\mathfrak{g}$.

6) Положим $b_i(G)=\dim_{\mathbf{R}} H^i(G)$ для $i\geqslant 0$ и, обозначая через X формальную переменную, $P_G(X)=\sum\limits_{i\geqslant 0} b_i(G)\,X^i$.

а) Показать, что $b_i(G)=\int\limits_G \operatorname{tr}\bigwedge^i(\operatorname{Ad} g)\,dg$ и $P_G(X)=\int\limits_G \det(1+X.\operatorname{Ad} g)\,dg$ (ср. дополнение II, лемма 1).

б) Вывести отсюда равенства $\sum\limits_i b_i(G)=2^r$ и $\sum\limits_i (-1)^i b_i(G)=0$, если $\dim G>0$ (использовать формулу Г. Вейля или упражнение 8 к § 2).

в) Пусть $G=\mathbf{U}(n, \mathbf{C})$. Показать, что $P_G(X)$ совпадает с коэффициентом при $(X_1\ldots X_n)^{2n-2}$ в многочлене

$$\frac{1}{n!}(1+X)^n\prod_{\substack{1\leqslant i, j\leqslant n\\ i\neq j}}(X X_i+X_j)(X_i-X_j)$$

(с коэффициентами в $\mathbf{Z}[X]$).

7) Пусть K — связная компактная группа Ли.

а) Пусть $f\colon K\to G$ — сюръективный гомоморфизм с конечным ядром. Показать, что гомоморфизм $H(f^*)\colon H(G)\to H(K)$ является мономорфизмом.

б) Показать, что алгебра $H(G\times K)$ канонически отождествляется с левым тензорным произведением $H(G)^g\otimes H(K)$.

в) Вывести из а) и б), что алгебра $H(G)$ изоморфна $H(C(G)_0)^g\otimes H(D, G))$. Показать, что алгебра $H(C(G)_0)$ изоморфна $\bigwedge(\mathfrak{c}^*)$, где $\mathfrak{c}=L(C(G))$.

¶ 8) Пусть k — тело характеристики нуль и E — градуированная левая биалгебра над k (*Alg.*, chap. III, p. 148, def. 3 [1])). Предположим, что E антикоммутативна и антикокоммутативна, а также что $E_m=0$ для достаточно больших m. Пусть P означает пространство примитивных элементов в E (ср. гл. II, § 1).

а) Показать, что любой однородный элемент P имеет нечетную степень (выписать $c(x^m)$ для большого m). Получить отсюда канонический морфизм градуированных левых биалгебр $\varphi\colon\bigwedge(P)\to E$ (структура градуированной левой биалгебры на $\bigwedge(P)$ определена в *Alg.*, chap. III, p. 198, ex. 6).

б) Показать, что φ является изоморфизмом (применить доказательство теоремы 1 гл. II, § 1, n° 6).

9) Обозначим через $m\colon G\times G\to G$ операцию умножения в G, так что $m(g, h)=gh$ для $g, h\in G$. Отождествим $H(G\times G)$ с $H(G)^g\otimes H(G)$ (упражнение 7б)) так, чтобы отображение m^* задавало гомоморфизм алгебр $c\colon H(G)\to H(G)^g\otimes H(G)$.

[1]) См. также приложение к *Гр. и алг. Ли*, 1976. — *Прим. перев.*

а) Показать, что $(H(G), c)$ является левой градуированной антикоммутативной и антикокоммутативной биалгеброй (заметить, что отображение $g \to g^{-1}$ задает на $H^p(G)$ умножение на $(-1)^p$).

б) Пусть $P(G)$ — градуированное подпространство в $H(G)$, образованное примитивными элементами; вывести из упражнения 8, что существует изоморфизм градуированных биалгебр $\bigwedge(P(G)) \to H(G)$.

в) Показать, что $\dim_{\mathbf{R}} P(G) = r$ (использовать упражнение 6б)).

г) Вывести отсюда, что многочлен $\sum_{i \geqslant 0} b_i(G) X^i$ имеет вид $(1+X)^c \prod_{i=1}^{l} (1+ X^{2k_i+1})$, где c — размерность $C(G)$, l — ранг $D(G)$, а k_i — целые числа $\geqslant 1$; кроме того, $k_1 + \ldots + k_l = (1/2) \operatorname{Card} R(G, T)$ [1])

10) Пусть H — замкнутая подгруппа в G; обозначим через dh меру Хаара на H с полной массой 1. Положим $\chi(G/H) = \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i \dim_{\mathbf{R}} H^i(G/H)$.

а) Доказать равенство $\chi(G/H) = \int_H \det(1 - \operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} h)\, dh$ (использовать *Alg.*, chap. X, p. 41, prop. 11, а также лемму 1 из приложения II, n° 2).

б) Пусть $\pi_0(H)$ — число связных компонент в H. Показать, что

$\chi(G/H) = 0$, если H_0 имеет не максимальный ранг,

$\chi(G/H) = w(G)/w(H_0)\, \pi_0(H)$, если H имеет максимальный ранг.

11) Пусть u — автоморфизм порядка 2 группы G; обозначим через K связную компоненту единицы в множестве неподвижных точек для u, через $\mathfrak{k}$ — ее алгебру Ли и через X — симметрическое пространство G/K (§ 1, упражнение 8).

а) Показать, что всякая G-инвариантная дифференциальная форма ω на X обладает свойством $d\omega = 0$ (заметить, что u задает на $\operatorname{Alt}^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ умножение на $(-1)^p$).

б) Получить отсюда изоморфизм градуированной алгебры $H(G/K)$ на градуированную подалгебру в $\operatorname{Alt}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$, образованную K-инвариантными элементами.

в) Положим $b_i(G/K) = \dim_{\mathbf{R}} H^i(G/K)$ для $i \geqslant 0$; для $k \in K$ обозначим через $\operatorname{Ad}^- k$ ограничение $\operatorname{Ad} k$ на собственное подпространство $L(u)$, соответствующее собственному значению -1. Пусть dk — мера Хаара на K с полной массой 1. Доказать формулы: $b_i(G/K) = \int_K \operatorname{Tr} \bigwedge^i (\operatorname{Ad}^- k)\, dk$ и $\sum_{i \geqslant 0} b_i(G/K) X^i = \int_K \det(1 + X.\operatorname{Ad}^- k)\, dk$.

г) Если, кроме того, K имеет максимальный ранг, доказать, что алгебра $H(G/K)$ имеет нулевые компоненты нечетных степеней (заметить, что $u = \operatorname{Int}(k)$ для некоторого $k \in K$).

д) Вычислить градуированную алгебру $H(\mathbf{S}_n)$. Вывести отсюда, что $\mathbf{S}_n$ допускает структуру группы Ли (совместимую со структурой многообразия) тогда и только тогда, когда $n = 1$ или 3.

12) Пусть H — связная замкнутая подгруппа в G и $\mathfrak{h}$ — ее алгебра Ли.

а) Пусть α — элемент из $\mathfrak{h}^*$, инвариантный относительно H; показать, что существует такой элемент $\bar{\alpha}$ в $\mathfrak{g}^*$, инвариантный относительно H, что его ограничение на $\mathfrak{h}$ совпадает с α. Показать, что элемент $d\bar{\alpha} \in \operatorname{Alt}^2(\mathfrak{g})$ аннулируется $i(\eta)$ и $\theta(\eta)$ для всех $\eta \in \mathfrak{h}$ и что класс этого элемента в $H^2(G/H)$ не зависит от выбора $\bar{\alpha}$. Таким образом, определен гомоморфизм $\varphi\colon H^1(H) \to H^2(G/H)$.

---

[1]) Числа k_i совпадают с показателями системы $R(G, T)$. Ср. Leray J., Sur l'homologie des groupes de Lie, des éspaces homogènes et éspaces fibrés principaux, Colloque de Topologie de Bruxelles (1950), p. 101—105.

б) Предположим в дальнейшем, что G полупроста. Доказать, что φ — изоморфизм.

в) Доказать, что H полупроста тогда и только тогда, когда $H^2(G/H)=0$.

г) Не предполагая связности H, определить изоморфизм $(\mathfrak{h}^*)^H \to H^2(G/H)$ (применить б) к H_0).

13) Пусть H — замкнутая подгруппа в полупростой группе G; положим $X = G/H$ и $n = \dim X$. Показать, что следующие условия эквивалентны:

(i) Существует такая 2-форма ω на X, что $d\omega = 0$ и для всех $x \in X$ знакопеременная билинейная форма ω_x на $T_x(X)$ невырожденна;

(ii) n четно и существует такой элемент $\omega \in H^2(G/H)$, что $\omega^{n/2} \neq 0$;

(iii) H является централизатором некоторого тора в G;

(iv) H имеет максимальный ранг и на X существует G-инвариантная комплексная структура;

(v) на X существует такая комплексная структура j и такая 2-форма ω, что $d\omega = 0$ и для любых $x \in X$, $u, v \in T_x(X)$ имеем $\omega_x(ju, jv) = \omega_x(u, v)$ и $\omega_x(u, ju) > 0$ при $u \neq 0$ (*другими словами, на X существует *кэлерова структура*$_*$).

(vi) на X существуют комплексная структура j и 2-форма ω, удовлетворяющие условиям (v) и инвариантные относительно G (*т. е. на X существует G-инвариантная кэлерова структура$_*$).

(Для доказательства (ii) $\Rightarrow$ (iii) положить $S = C(H)_0$ и $Z = Z_G(S)$; показать с помощью упражнения 12г), что каноническое отображение $H^2(G/Z) \to H^2(G/H)$ сюръективно, и вывести отсюда, что $Z = H$. Эквивалентность (iii) и (iv) следует из упражнения 8 к § 4. Для доказательства (iii) $\Rightarrow$ (vi) построить невырожденную H-инвариантную эрмитову форму на $\mathfrak{g}/L(H)$ и рассмотреть ее мнимую часть; использовать упражнение 11а).)

§ 7

1) Пусть $G = \mathbf{U}(n, \mathbf{C})$ и T — подгруппа диагональных матриц; для $t = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)$ из T и $1 \leqslant i \leqslant n$ положим $\varepsilon_i(t) = t_i$. Обозначим через σ тождественное представление G в $\mathbf{C}^n$.

а) Для группы $\mathrm{X}(T)$ $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ являются базисом; показать, что каждый элемент $\mathbf{Z}[\mathrm{X}(T)]^W$ имеет вид $e^{k(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)} P(e^{\varepsilon_1}, \ldots, e^{\varepsilon_n})$, где k — целое число, а P — симметрический многочлен с целыми коэффициентами от n переменных.

б) Показать, что представления $\bigwedge^r \sigma$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$ неприводимы.

в) Показать, что гомоморфизм $u: \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n][X_n^{-1}] \to R(G)$, для которого $u(X_i) = [\bigwedge^i \sigma]$, является изоморфизмом.

2) Пусть $G = \mathbf{SO}(2l+1, \mathbf{R})$ с $l \geqslant 1$; сохраним обозначения упражнения 2 к § 4. Обозначим через σ представление G в $\mathbf{C}^{2l+1}$, получающееся из тождественного расширением поля скаляров.

а) $\omega_1, \ldots, \omega_{l-1}, 2\omega_l$, а также $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l$ являются базисом $\mathbf{Z}$-модуля $\mathrm{X}(T)$.

б) Обозначим через η_i элемент $e^{\varepsilon_i} + e^{-\varepsilon_i}$ в $\mathbf{Z}[\mathrm{X}(T)]$. Показать, что каждый элемент из $\mathbf{Z}[\mathrm{X}(T)]^W$ записывается в виде $P(\eta_1, \ldots, \eta_l)$, где P — симметрический многочлен с целыми коэффициентами от l переменных.

в) Показать, что представления $\bigwedge^r \sigma$ $(r \leqslant 2l+1)$ неприводимы. Доказать при $r \leqslant l$ равенство

$$\mathrm{Ch}(\textstyle\bigwedge^r \sigma) = s_r(\eta_1, \ldots, \eta_l) + (l - r + 2)\, s_{r-2}(\eta_1, \ldots, \eta_l) + \ldots$$
$$\ldots + \binom{l - r + 2k}{k} s_{r-2k}(\eta_1, \ldots, \eta_l) + \ldots,$$

где s_k — элементарные симметрические многочлены от l переменных.

г) Показать, что гомоморфизм $u\colon \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_l] \to R(G)$, для которого $u(X_i) = [\bigwedge^i \sigma]$, является изоморфизмом.

3) Пусть $G = \mathbf{SO}(2l, \mathbf{R})$ с $l \geqslant 2$; используем обозначения упражнения 2 к § 4. Обозначим через σ представление G в $\mathbf{C}^{2l}$, получающееся из тождественного расширением поля скаляров.

а) В $\mathbf{Z}$-модуле $\mathrm{X}(T)$ $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l$ являются базисом.

б) Обозначим через η_i элемент $e^{\varepsilon_i} + e^{-\varepsilon_i}$ в $\mathbf{Z}[\mathrm{X}(T)]$ и через δ — элемент $\prod_{i=1}^{l} (e^{\varepsilon_i} - e^{-\varepsilon_i})$. Показать, что всякий элемент из $\mathbf{Z}[\mathrm{X}(T)]^W$ записывается в виде $P(\eta_1, \ldots, \eta_l) + Q(\eta_1, \ldots, \eta_l).\delta$, где P и Q — симметрические многочлены от l переменных с коэффициентами в $(1/2)\mathbf{Z}$.

в) Показать, что представления $\bigwedge^r \sigma$ неприводимы при $r \neq l$; представление $\bigwedge^l \sigma$ является прямой суммой двух представлений τ^+ и τ^- со старшими весами $2\varpi_l$ и $2\varpi_{l-1}$ соответственно (см. гл. VIII, § 13, упражнение 10).

г) Показать, что при $r \leqslant l$ элемент $\mathrm{Ch}(\bigwedge^r \sigma)$ дается формулой из упражнения 2в) и что

$$\mathrm{Ch}\,\tau^+ = \frac{1}{2}(\delta + \mathrm{Ch} \bigwedge^l \sigma), \quad \mathrm{Ch}\,\tau^- = \frac{1}{2}(-\delta + \mathrm{Ch} \bigwedge^l \sigma).$$

д) Показать, что гомоморфизм $u\colon \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_l; Y] \to R(G)$, для которого $u(X_i) = [\bigwedge^i \sigma]$ и $u(Y) = [\tau^+]$, сюръективен и что его ядро порождается элементом вида $Y^2 - YX_l + A$, где $A \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_l]$.

4) Пусть E — комплексное векторное пространство, и пусть $\mathrm{T}^p_q(E)$ — пространство тензоров типа (p, q) над E (*Alg.*, chap. III, p. 63). Обозначим через $H^p_q(E)$ подпространство в $\mathrm{T}^p_q(E)$, образованное симметричеекими (т. е. принадлежащими образу в $\mathrm{T}^p_q(E)$ пространства $\mathrm{TS}^p(E) \otimes \mathrm{TS}^q(E^*)$) тензорами, аннулируемыми всеми свертываниями c^i_j для $i \in [1, p]$, $j \in [p+1, p+q]$ (*Alg.*, chap. III, p. 64).

а) Показать, что $H^p_q(\mathbf{C}^n)$ устойчиво относительно $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ и, следовательно, $\mathbf{SU}(n, \mathbf{C})$; обозначим через τ^p_q возникающее таким образом представление для $\mathbf{SU}(n, \mathbf{C})$.

б) Показать, что τ^p_q — неприводимое представление, старший вес которого (в обозначениях упражнения 1 к § 4) равен $p\varpi_1 + q\varpi_{n-1}$.

в) Всякое неприводимое представление группы $\mathbf{SU}(3, \mathbf{C})$ изоморфно одному из представлений τ^p_q.

г) Пусть $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — канонический базис в $\mathbf{C}^n$ и $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — сопряженный базис. Показать, что $H^p_q(\mathbf{C}^n)$ отождествляется с пространством многочленов $P \in \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ однородных степени p по x_i и степени q по y_j, для которых

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial y_i} = 0.$$

5) Пусть k — поле характеристики нуль, V — векторное пространство над k и Ψ — невырожденная квадратичная форма на V. Форма Ψ (соотв. обратная к Ψ форма) определяет элемент $\Gamma \in \mathrm{S}^2(V^*)$ (соотв. $\Gamma^* \in \mathrm{S}^2(V)$). Обозначим через Q эндоморфизм $\mathrm{S}(V)$, задаваемый умножением на Γ^*, через Δ — эндоморфизм $\mathrm{S}(V)$, задаваемый внутренним умножением на Γ, и через h — эндоморфизм $\mathrm{S}(V)$, который на $\mathrm{S}^r(V)$ сводится к умножению на $-n/2-r$.

а) Если $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — ортонормированный базис в V, то $Q(P)=(1/2)(\sum x_i^2).P$, $\Delta(P)=(1/2)\sum\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}$ для $P\in \mathsf{S}(V)$.

б) Доказать формулы $[\Delta, Q]=-h$, $[h,\Delta]=2\Delta$, $[h, Q]=-2Q$.

в) Пусть H_r — пространство элементов $\mathsf{S}^r(V)$, аннулируемых Δ («однородные гармонические многочлены степени r»). Вывести из б) разложение в прямую сумму, инвариантное относительно $\mathbf{O}(\Psi)$:

$$\mathsf{S}^r(V)=H_r\oplus QH_{r-2}\oplus Q^2H_{r-4}\oplus\ldots .$$

г) Показать, что представление H_r неприводимо (ср. гл. VIII, § 13, n° 3 (IV)).

д) Пусть $k=\mathbf{C}$, $V=\mathbf{C}^n$ с обычной квадратичной формой ($n\geqslant 3$). В пространстве H_r возникает неприводимое представление τ_r группы $\mathbf{SO}(n, \mathbf{R})$; показать, что в обозначениях упражнения 2 к § 4 старшим весом τ_r является $r\varpi_1$.

е) Пусть Γ — элемент Казимира группы G, получаемый из формы Киллинга. Доказать формулу

$$\Gamma_{\mathsf{S}(V)}=\frac{1}{2n-4}\left(-4Q\Delta+\left(H+\frac{n}{2}I\right)\left(H+\left(2-\frac{n}{2}\right)I\right)\right).$$

Вычислить $\tilde{\Gamma}(\tau_r)$ и вывести отсюда значение формы Q_Γ (предложение 4).

6) Предположим, что группа G почти проста. Показать, что G допускает точное неприводимое представление всегда, за исключением случая $G=\mathbf{Spin}(4k, \mathbf{R})$ при $k\geqslant 2$.

7) Пусть $\tau\colon G\to\mathbf{SO}(n, \mathbf{R})$ — *вещественное* унитарное представление G; обозначим через $\varphi\colon \mathbf{Spin}(n, \mathbf{R})\to\mathbf{SO}(n, \mathbf{R})$ каноническое двулистное накрытие. Говорят, что τ — *спинорное* представление, если существует морфизм $\tilde{\tau}\colon G\to\mathrm{Spin}(n, \mathbf{R})$, для которого $\varphi\circ\tilde{\tau}=\tau$.

а) Пусть Σ — такое подмножество в $P(T,\tau)$, что $\Sigma\cup(-\Sigma)=P(T,\tau)$ и $\Sigma\cap(-\Sigma)=\varnothing$; обозначим через ω_Σ сумму элементов из Σ. Класс ϖ элемента ω_Σ в $\mathrm{X}(T)/2\,\mathrm{X}(T)$ не зависит от выбора Σ. Доказать, что τ — спинорное представление тогда и только тогда, когда $\varpi=0$.

б) Доказать, что $\rho\in\mathrm{X}(T)$ тогда и только тогда, когда присоединенное представление является спинорным.

8) Пусть G — группа Ли с компактной алгеброй Ли и с конечным числом связных компонент. Показать, что она обладает точным линейным представлением в конечномерном векторном пространстве (записать G в виде полупрямого произведения компактной группы K на векторную группу N; выбрать точное представление K в конечномерном векторном пространстве W и представить G как подгруппу в аффинной группе пространства $W\oplus N$).

§ 8

1) Пусть $G=\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$ и σ — тождественное представление G в $\mathbf{C}^2$.

а) Неприводимые представления G — это представления $\tau^n=\mathsf{S}^n\sigma$ для $n\geqslant 0$.

б) Пусть e_1, e_2 — канонический базис в $\mathbf{C}^2$; показать, что коэффициенты τ^n в базисе $\left(e_1^i e_2^{n-i}\right)_{0\leqslant i\leqslant n}$ имеют вид

$$\tau_{ij}^n(g)=\frac{(-1)^i}{j!}\alpha^{i+j-n}\beta^{j-i}P_{ij}^n(|\alpha|^2).$$

где $g=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in G$, а $P^n_{ij}(t)=\frac{d^j}{dt^j}[t^{n-i}(1-t)^i]$ («многочлены Якоби»).

в) Вывести из б), что функции $(n+1)^{1/2}\left(\frac{j!\,(n-j)!}{i!\,(n-i)!}\right)^{1/2}\tau^n_{ij}$ для целых i, j, n с условиями $0\leqslant i\leqslant n$, $0\leqslant j\leqslant n$ образуют ортонормированный базис в $L^2(G)$.

г) Для $g=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in G$ пусть $\alpha=t^{1/2}e^{-i(\varphi+\psi)/2}$, $\beta=(1-t)^{1/2}e^{i(\varphi-\psi)/2}$, где $0\leqslant t\leqslant 1$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, $0\leqslant\psi<2\pi$. Показать, что нормализованная мера Хаара на G равна $(4\pi^2)^{-1}\,dt\,d\varphi\,d\psi$.

д) Пусть $a, b\in(1/2)\mathbf{Z}$ таковы, что $a-b\in\mathbf{Z}$. Вывести из г), что многочлены $P^n_{n/2-a,\,n/2-b}(t)$ для целых n той же четности, что и $2a$, $n\geqslant\max(2a, 2b)$, образуют ортонормированный базис в $L^2([0, 1])$ относительно меры $t^{-a-b}(1-t)^{a-b}\,dt$.

2) Пусть f — функция класса C^∞ на G с комплексными значениями. Доказать, что существуют две такие комплекснозначные функции g и φ класса C^∞ на G, что φ центральна и $f=g*\varphi$.

3) Пусть u — неприводимое представление G со старшим весом λ. Для $x\in\mathfrak{g}$ обозначим через $\bar{x}$ единственный элемент из $\bar{C}$, сопряженный с x с помощью $\mathrm{Ad}(G)$. Доказать равенство $\|u(x)\|_\infty=|\delta(\lambda)(\bar{x})|$.

4) Выберем на $\mathfrak{g}$ невырожденную положительную квадратичную форму Q, инвариантную относительно $\mathrm{Ad}(G)$. Для $x\in\mathfrak{t}$ положим $\vartheta_0(x)=\sum_{u\in\Gamma(T)} e^{-Q(x+u)}$.

а) Показать, что ϑ_0 — функция класса C^∞ на $\mathfrak{t}$ и что существует такая функция ϑ_1 класса C^∞ на T, что $\vartheta_1\circ\exp_T=\vartheta_0$.

б) Показать, что существует единственная центральная функция ϑ на G класса C^∞, ограничение которой на T совпадает с ϑ_1. Для любого максимального тора S в G и любого $x\in L(S)$ справедливо равенство

$$\vartheta(\exp x)=\sum_{u\in\Gamma(S)} e^{-Q(x+u)}.$$

в) Пусть A — альков в $\mathfrak{t}$, dx — мера Хаара на $\mathfrak{t}$ и h — локально интегрируемая функция на $\mathfrak{t}$, инвариантная относительно аффинной группы Вейля W'_a (§ 5, n° 2). Доказать равенство

$$\int_A h(x)\,dx=\frac{1}{w(G)}\int_{\mathfrak{t}} h(x)\,e^{-Q(x)}(\vartheta_0(x))^{-1}\,dx.$$

г) Для $x\in\mathfrak{g}$ положим $\xi(x)=\lambda_\mathfrak{g}(x)\,e^{-Q(x)}(\vartheta(\exp x))^{-1}$, где $\lambda_\mathfrak{g}(x)=\det\frac{e^{\mathrm{ad}\,x}-1}{\mathrm{ad}\,x}$ (§ 6, n° 3). Показать, что ξ — функция класса C^∞ на $\mathfrak{g}$ и что если μ — мера Хаара на $\mathfrak{g}$, то образ при отображении $\exp_G$ меры $\xi\mu$ является мерой Хаара на G (использовать в), а также следствие 2 теоремы 1 и предложение 4 (§ 6, nn° 2 и 3)).

д) Доказать формулу $\vartheta_0(x)=m\sum_{\lambda\in X(T)}\exp\left(\delta(\lambda)(x)-\frac{1}{4}Q'(\delta(\lambda))\right)$ для $x\in\mathfrak{t}$, где Q' — квадратичная форма на $\mathfrak{t}^*_\mathbf{C}$, обратная к квадратичной форме на $\mathfrak{t}_\mathbf{C}$, задаваемой Q, а m — константа, которую можно вычислить (использовать формулу Пуассона,

ср. *Спектр. теор.*, гл. II, § 1, n° 8). Вывести отсюда равенство $\vartheta(t) = m \sum_{\lambda \in X(T)} e^{-Q'(\delta(\lambda))/4} t^{\lambda}$ для $t \in T$.

5) а) Пусть V — вещественное векторное пространство, f — ненулевой линейный функционал на V и H — его ядро. Для того чтобы функция φ класса C^∞ на V обращалась в нуль на H, необходимо и достаточно, чтобы она записывалась в виде $f\varphi'$, где φ' — функция класса C^∞ на V.

б) Пусть V — вещественное векторное пространство и $(f_i)_{i \in I}$ — конечное семейство ненулевых функционалов, для которых подпространства $H_i = \operatorname{Ker} f_i$ попарно различны. Для того чтобы функция φ класса C^∞ на V обращалась в нуль на объединении H_i, необходимо и достаточно, чтобы она записывалась в виде $\psi \prod_{i \in I} f_i$, где ψ — функция класса C^∞ на V.

в) Пусть T — тор и $(\alpha_i)_{i \in I}$ — конечное семейство характеров T, отличных от 1, для которых подгруппы $K_i = \operatorname{Ker} \alpha_i$ попарно различны. Для того чтобы функция φ класса C^∞ на T обращалась в нуль на объединении K_i, необходимо и достаточно, чтобы она записывалась в виде $\psi \cdot \prod_{i \in I} (\alpha_i - 1)$, где ψ — функция класса C^∞ на T (рассуждать локально на T и свести к б)).

г) В обозначениях n° 4 доказать, что отображение $b_\infty : \mathscr{C}^\infty(T)^W \to \mathscr{C}^\infty(T)^{-W}$ биективно.

6) Предположим, что G некоммутативна. Показать, что непрерывная функция $J(\rho)^{1/3}$ на T антиинвариантна относительно W, но не принадлежит образу отображения b_c: $\mathscr{C}(T)^W \to \mathscr{C}(T)^{-W}$.

§ 9

1) Пусть A — компактное подмножество в $\mathbf{R}$, состоящее из нуля и чисел вида $1/n$, где n — целое $\geqslant 1$. Показать, что если снабдить $\mathscr{C}^r(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ топологией равномерной C^r-сходимости на A, то множество морфизмов, задающих вложение в окрестности A, не будет открытым в $\mathscr{C}^r(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ (рассмотреть последовательность функций $(f_n)_{n \geqslant 1}$, обладающих свойствами $f_n(x) = x$ для $x \leqslant 1/(n+1)$ и $f_n(x) = x - 1/n$ для $x \geqslant 1/n$).

2) Пусть X — отделимое многообразие класса C^r $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$, счетное в бесконечности и чистое размерности n.

а) Предположим, что существует вложение φ многообразия X в векторное пространство V конечной размерности. Показать, что существует вложение X в $\mathbf{R}^{2n+1}$ (если $\dim V > 2n+1$, доказать, что существует такая точка $p \in V$, что для любого $x \in X$ прямая, соединяющая p и $\varphi(x)$, пересекает $\varphi(X)$ трансверсально в единственной точке $\varphi(x)$; вывести отсюда, что существует вложение X в пространство размерности $\dim V - 1$).

б) Показать, что существует вложение X в $\mathbf{R}^{2n+1}$. (Пусть $\mathcal{O}$ — совокупность открытых множеств в X, $\mathscr{U}$ — подмножество в $\mathcal{O}$, состоящее из таких U, для которых существует морфизм φ: $X \to \mathbf{R}^{2n+1}$, ограничение которого на U является вложением; показать, используя а), что $\mathscr{U}$ — квазиполное семейство (*Top. gen.*, chap. IX., p. 107, ex. 27) в $\mathcal{O}$ и, следовательно, совпадает с $\mathcal{O}$.)

в) Показать, что существует собственное вложение X в $\mathbf{R}^{2n+1}$. (С помощью собственной функции на X построить собственное вложение X в $\mathbf{R}^{2n+2}$.)

¶ 3) Пусть G — группа Ли и H — компактная подгруппа в G. Предположим, что G обладает *точным* линейным представлением (конечной размерности).

а) Пусть $\Theta_H(G)$ означает подалгебру в $\mathscr{C}(H; \mathbf{R})$, образованную ограничениями на H представляющих (непрерывных) функций на G. Показать, что $\Theta_H(G)$ плотна в $\mathscr{C}(H; \mathbf{R})$ относительно топологии равномерной сходимости.

б) Пусть $f \in \Theta_H(G)$. Показать, что существуют такое представление σ группы G в конечномерном вещественном пространстве и такой матричный элемент представления $\sigma|H$, который не ортогонален f (*Th. spec.*).

в) Пусть $\rho\colon H \to \mathbf{GL}(V)$ — представление H в конечномерном вещественном векторном пространстве. Показать, что существуют конечномерное вещественное векторное пространство W, представление $\sigma\colon G \to \mathbf{CL}(W)$ и инъективный гомоморфизм $u\colon V \to W$, такие, что $u(\rho(h)v) = \sigma(h)u(v)$ для $h \in H$, $v \in V$.

(Свести к случаю неприводимого ρ и использовать б)).

4) Пусть G — группа Ли, H — компактная подгруппа в G и ρ — унитарное представление H в вещественном гильбертовом пространстве V. Доказать, что существуют вещественное гильбертово пространство W, унитарное представление σ группы G в W и изометрическое вложение $u\colon V \to W$, такие, что $u(\rho(h)v) = \sigma(h)u(v)$ для $h \in H$, $v \in V$ (тот же метод, что и в упражнении 3).

5) Пусть G — группа Ли и H — компактная подгруппа в G. Предположим, что существует точное линейное представление $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$ в конечномерном вещественном векторном пространстве V.

а) Показать, что существует представление σ группы $\mathbf{GL}(V)$ в конечномерном вещественном векторном пространстве W, невырожденная положительная квадратичная форма q на V и вектор $w \in W$, такие, что $\rho(H) = \mathbf{O}(q) \cap F_w$, где F_w — стабилизатор w в $\mathbf{GL}(V)$ (выбрать H-инвариантную квадратичную форму q и такое представление группы $\mathbf{O}(q)$, для которого $\rho(H)$ является стабилизатором некоторой точки (следствие 2 из n° 2), затем применить упражнение 3в)).

б) Вывести из а), что существуют конечномерное вещественное пространство E, представление группы G в E и вектор $e \in E$, стабилизатором которого является H (взять $E = W \oplus Q$, где Q — пространство квадратичных форм на V, и $e = (w, q)$).

6) Пусть G — группа Ли и H — компактная подгруппа в G. Показать, что существует унитарное представление G в вещественном гильбертовом пространстве E и вектор $e \in E$, стабилизатор которого совпадает с H (взять в качестве E пространство $L^2(G)$).

7) Пусть G — группа Ли, H — компактная подгруппа в G и ρ — унитарное представление H в вещественном гильбертовом пространстве W. Обозначим через X многообразие $G \times^H W$ (n° 3).

а) Показать, что существуют гильбертово пространство V, унитарное представление σ группы G в V и (аналитическое) вложение $\varphi\colon X \to V$, такие, что $\varphi(gx) = \sigma(g)\varphi(x)$ для $g \in G$, $x \in X$ (использовать упражнения 4 и 6).

б) Если W конечномерно и G допускает точное линейное представление конечной размерности, то V также можно выбрать конечномерным (при этом σ может не быть унитарным) (использовать упражнения 3 и 5).

¶ 8) Пусть X — паракомпактное многообразие класса C^r ($1 \leqslant r \leqslant \infty$) и G — группа Ли, действующая собственно на X так, что отображение $(g, x) \mapsto gx$ принадлежит классу C^r.

а) Показать, что существуют унитарное представление ρ группы G в гильбертовом пространстве V и вложение φ (класса C^r) многообразия X в V, такие, что $\varphi(gx)=\rho(g)\varphi(x)$ для $g\in G, x\in X$. (Использовать предложение 6, упражнение 7 и рассуждать, как в доказательстве предложения 4.)

б) Предположим дополнительно, что

(i) G допускает точное линейное конечномерное представление;

(ii) X счетно в бесконечности и ограниченной размерности;

(iii) имеется лишь конечное число типов орбит для действия G.

Доказать, что существуют конечное покрытие X открытыми множествами $(U_i)_{i\in I}$, устойчивыми относительно G, компактные подгруппы $(H_i)_{i\in I}$ в G и для каждого $i\in I$ замкнутое подмногообразие S_i в U_i, устойчивое относительно H_i, такие, что отображение $(g, s)\mapsto gs$ определяет после факторизации изоморфизм $G\overset{H_i}{\times}S_i$ на U_i (показать, что открытые множества в X/G, прообраз которых в X допускает такое покрытие, образуют квазиполное семейство в совокупности всех открытых подмножеств X/G (ср. *Top. gen.*, chap. IX, p. 107, ex. 27).

в) В предположениях б) доказать, что существуют представление G в вещественном конечномерном векторном пространстве V и вложение класса C^r многообразия X в V, согласованное с действием G (рассуждать по индукции на множестве подгрупп в G, используя б) и упражнения 2, 7).

9) Пусть G — группа Ли, собственно действующая на многообразии X. Предположим, что выполнено одно из двух условий:

(i) X/G — компакт, X счетно в бесконечности и ограниченной размерности;

(ii) X — конечномерное векторное пространство и G линейно действует на X.

Доказать, что множество типов орбит элементов из X *конечно* (рассмотреть одновременно оба случая индукцией по $\dim X$, используя предложение 6).

10) Пусть G — подгруппа Ли в $\mathbf{GL}(3, \mathbf{R})$, образованная матрицами вида $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a, b\in\mathbf{R}$. Показать, что для тождественного представления G в $\mathbf{R}^3$ множество типов орбит бесконечно.

¶ 11) Для целого $n\geqslant 1$ определим отображение φ_n множества $\left]0, \frac{1}{2}\right[\times\mathbf{T}^2$ в $\mathbf{R}^3$, полагая $\varphi_n(r;\alpha,\beta)=((n+r\cos 2\pi\beta)\cos 2\pi\alpha, \quad (n+r\cos 2\pi\beta)\sin 2\pi\alpha, \quad r\sin 2\pi\beta)$. Пусть

$$T_n=\varphi_n\left(\left[0, \frac{1}{2}\right[\times\mathbf{T}^2\right),\quad S_n=\varphi_n(\{0\}\times\mathbf{T}^2).$$

а) Показать, что ограничение φ_n на $\left]0, \frac{1}{2}\right[\times\mathbf{T}^2$ является изоморфизмом (класса C^ω) множества $\left]0, \frac{1}{2}\right[\times\mathbf{T}^2$ на T_n-S_n.

б) Пусть $f_n\colon T_n\to T_n$ — отображение, совпадающее с тождественным на S_n и такое, что

$$f_n(\varphi_n(r;\alpha,\beta)=\varphi_n(r;\alpha-(n-1)\beta, -\alpha+n\beta)$$

для $r>0$. Показать, что f_n задает автоморфизм T_n-S_n.

в) Показать, что на $\mathbf{R}^3$ существует такая структура аналитического много-

образия, что отображения $f_n\colon T_n \to \mathbf{R}^3$ и каноническое вложение $\mathbf{R}^3 - \bigcup_n S_n \to \mathbf{R}^3$ аналитичны. Обозначим через X определенное таким образом аналитическое многообразие.

г) Для $\theta \in \mathbf{T}$ обозначим через R_θ вращение

$$(x, y, z) \mapsto (x \cos 2\pi\theta - y \sin 2\pi\theta,\ x \sin 2\pi\theta + y \cos 2\pi\theta,\ z)$$

пространства $\mathbf{R}^3$. Доказать, что следующие формулы определяют аналитическое действие $\mathbf{T}$ на X:

$$\theta.u = R_\theta(u), \quad \text{если } u \in X - \bigcup_n S_n,$$

$$\theta.u = R_{n\theta}(u), \quad \text{если } u \in S_n \text{ для } n \geqslant 1.$$

д) Показать, что множество типов орбит в X (относительно действия $\mathbf{T}$, определенного в г)) бесконечно.

е) Показать, что не существует вложения X в конечномерное векторное пространство, при котором действие $\mathbf{T}$ переходило бы в линейное (использовать упражнение 9).

12) Пусть G — компактная группа Ли.

а) Доказать, что множество классов сопряженности нормализаторов интегральных подгрупп в G конечно (рассмотреть действие G на грассманиане подпространств в $L(G)$ и применить упражнение 9).

б) Множество классов сопряженности полупростых (компактных) подгрупп в G конечно (заметить, что любая алгебра Ли содержит лишь конечное число полупростых идеалов (гл. I, § 6, упражнение 7), и использовать а)).

13) Пусть G — группа Ли, H и K — компактные подгруппы в G. Предположим, что G допускает точное линейное конечномерное представление. Показать, что существует такое конечное семейство F подгрупп в H, что для любого $g \in G$ подгруппа $H \cap gKg^{-1}$ сопряжена в H с одной из подгрупп семейства F (использовать упражнения 5 и 9).

14) Предположим, что многообразие X паракомпактно и локально конечномерно. Пусть G — группа Ли, собственно действующая на X, H — компактная подгруппа в G, t — класс сопряженности подгруппы H.

а) Показать, что множество X_H тех точек в X, для которых стабилизатор совпадает с H,— локально замкнутое подмногообразие в X.

б) Показать, что отображение $(g, x) \mapsto gx$ множества $G \times X_H$ в X задает изоморфизм (класса C^r) множества $G \times^{N(H)} X_H$ на $X_{(t)}$.

¶ 15) Пусть G — топологическая локально компактная группа, собственно действующая на топологическом пространстве E; пусть ρ — представление G в конечномерном вещественном векторном пространстве V. Обозначим через dg правую меру Хаара на G.

а) Пусть $\mathscr{P}$ — совокупность подмножеств $A \subset E$, обладающих следующим свойством: существует такое открытое покрытие $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ пространства E, что для любого $\alpha \in I$ множество тех $g \in G$, для которых $gA \cap U_\alpha \neq \varnothing$, относительно компактно в G.

Доказать, что для любой непрерывной функции $f\colon E \to V$, носитель которой принадлежит $\mathscr{P}$, отображение $x \mapsto \int_G \rho(g)^{-1} f(gx)\, dg$ является непрерывным отображением E в V, согласованным с действием G.

б) Предположим, что выполнено одно из следующих условий:

(i) пространство E/G регулярно;

(ii) существует открытое множество $U \subset E$ и компакт K в G, такие, что $E = GU$ и $gU \cap U = \varnothing$, если $g \notin K$.

Показать, что каждая точка $x \in E$ обладает окрестностью, принадлежащей $\mathscr{P}$ (в случае (i) положить $A = V \cap W$, где V — такая окрестность x, что $gV \cap V = \varnothing$ для g вне некоторого компакта в G, а W — замкнутая G-устойчивая окрестность Gx, содержащаяся в GV).

Каждая точка E обладает G-устойчивой окрестностью, обладающей свойством (ii).

в) Предположим, кроме того, что E вполне регулярно. Пусть $x \in E$ и $v \in V$ таковы, что стабилизатор x содержится в стабилизаторе v. Доказать, что существует непрерывное отображение $F: E \to V$, согласованное с действием G и такое, что $F(x) = v$. (Пусть $\mathscr{F}$— пространство непрерывных числовых функций на E с носителями из $\mathscr{P}$, и пусть $u: \mathscr{F} \to V$ — отображение $\alpha \mapsto \int\limits_G \alpha(gx)\rho(g)^{-1} v\,dg$. Пусть C — выпуклая окрестность v в V; построить такую окрестность A точки x, принадлежащую $\mathscr{P}$, что $gx \in A$ влечет за собой $\rho(g)^{-1} v \in C$, и такую функцию α на E с носителем в A, что $\alpha(x) \neq 0$ и $\int\limits_G \alpha(gx)\,dg = 1$. Показать, что $u(\alpha)$ принадлежит C, и вывести отсюда, что $v \in \operatorname{Im} u$.)

16) Пусть G — топологическая группа, собственно действующая на отделимом топологическом пространстве E. Пусть $x \in E$, H — стабилизатор точки x в G, S — подмножество в E, содержащее x и инвариантное относительно H. Группа H действует справа на $G \times S$ по формуле $(g, s).h = (gh, h^{-1} s)$, где $g \in G$, $h \in H$, $s \in S$; отображение $(g, s) \mapsto gs$ определяет после факторизации отображение $(G \times S)/H$ в X. Говорят, что S является *трансверсалью в точке* x, если это отображение является гомеоморфизмом на открытое подмножество в X.

а) Если G дискретна, показать, что существует трансверсаль в точке x.

б) Пусть F — отделимое топологическое пространство, на котором собственно действует G, и пусть $f: E \to F$ — непрерывное отображение, согласованное с действием G и такое, что стабилизатор $f(x)$ в G совпадает с H. Если S — трансверсаль в точке $f(x)$, показать, что $f^{-1}(S)$ — трансверсаль в точке x.

в) Пусть N — замкнутая нормальная подгруппа в G, $\pi: E \to E/N$ — каноническая проекция, T — трансверсаль в точке $\pi(x)$ для действия G/N на E/N и $S \subset \pi^{-1}(T)$ — трансверсаль в точке x для действия HN на $\pi^{-1}(T)$. Показать, что S — трансверсаль в точке x (для действия G).

17) Пусть G — группа Ли. Покажем, что G обладает следующим свойством:

(T) Для любого вполне регулярного топологического пространства E, на котором собственно действует G, в каждой точке $x \in E$ существует трансверсаль (упражнение 16).

а) Показать, что группа Ли, допускающая точное конечномерное линейное представление, обладает свойством (T) (использовать упражнения 15, 16), а также предложение 6).

б) Если G содержит такую замкнутую нормальную подгруппу N, что G/N обладает свойством (T) и KN обладает свойством (T) для любой компактной подгруппы K в G, то G обладает свойством (T) (применить упражнение 16в)).

в) Если G_0 компактна, то G обладает свойством (T).

г) Если G содержит такую нормальную дискретную подгруппу N, что G/N обладает свойством (T), то G сама обладает свойством (T).

д) Показать, что G обладает свойством (T) (пусть N — ядро присоединенного представления; доказать, что G/N_0 обладает свойством (T), затем применить а), б) и упражнение 9 к § 1).

18) Пусть G — группа Ли, собственно действующая на вполне регулярном топологическом пространстве E.

а) Пусть $x \in E$ и t — орбитальный тип точки x; показать, что существует открытая окрестность U точки x, инвариантная относительно G и такая, что для всех $u \in \in U$ орбитальный тип $u \geqslant t$.

б) Предположим, что G свободно действует на E; пусть $\pi\colon E \to E/G$ — каноническая проекция. Показать, что для каждой точки $z \in E/G$ существует открытая окрестность U и непрерывное отображение $s\colon U \to E$, для которого $\pi \circ s(u) = u$ для всех $u \in U$.

19) Пусть G — группа Ли и H — компактная подгруппа в G. Доказать, что существует такая окрестность V группы H, что всякая подгруппа группы G, содержащаяся в V, сопряжена с некоторой подгруппой в H (применить упражнение 18а) к множеству компактных подмножеств в G, ср. *Интегр.*, гл. VIII, § 5, n° 6).

¶ 20) Пусть G — компактная группа Ли, m — положительное целое число.

а) Показать, что множество классов сопряженности подгрупп в G порядка $\leqslant m$ конечно (предполагая, что это не так, построить конечную группу F и последовательность гомоморфизмов $\varphi_n\colon F \to G$, для которой $\varphi_i(F)$ не сопряжена $\varphi_j(F)$ при $i \neq j$ и такую, что $\varphi_n(F)$ сходится к пределу $\varphi(f)$ для всех $f \in F$; показать, что φ — гомоморфизм, и вывести отсюда противоречие с упражнением 19.

б) Показать, что множество классов сопряженности подгрупп F в G, в которых каждый элемент имеет порядок $\leqslant m$, конечно (пусть μ — мера Хаара на G и U — такая симметричная окрестность единичного элемента, что U^2 не содержит элементов порядка $\leqslant m$, кроме единицы; доказать, что $\operatorname{Card}(F) \leqslant \mu(G)/\mu(U)$).

¶ 21) Пусть G — компактная группа Ли и T — максимальный тор в G.

а) Пусть $\mathscr{S}$ — семейство замкнутых подгрупп в G, инвариантное относительно сопряжения и такое, что семейство подгрупп $(S \cap T)_{S \in \mathscr{S}}$ конечно. Показать, что множество классов сопряженности подгрупп S_0 для $S \in \mathscr{S}$ конечно (с помощью упражнения 12а) свести к случаю, когда подгруппы S_0 нормальны; рассмотреть группы $C(S_0)_0$ и $D(S_0)$ и применить упражнение 12б)).

б) Показать, что $\mathscr{S}$ является объединением конечного числа классов сопряженности подгрупп в G (с помощью а) свести к случаю, когда все подгруппы $S \in \mathscr{S}$ имеют одну и ту же связную компоненту единицы Σ, нормальную в G, затем ограничить порядки элементов групп S/Σ и применить упражнение 20б)).

в) Пусть E — отделимое топологическое пространство, на котором непрерывно действует G. Показать, что если элементы E имеют конечное число типов орбит под действием T, то это же верно и для действия G.

Дополнение I

1) Пусть G — связная компактная группа. Обозначим через $d(G)$ верхнюю грань размерностей факторгрупп G, которые являются группами Ли. Предположим, что $d(G) < \infty$.

а) Пусть K — замкнутая нормальная подгруппа в G; показать, что $d(G/K) \leqslant d(G)$ и $d(G/K) = d(G)$, если K вполне разрывна.

б) Показать, что $D(G)$ — группа Ли и что ядро гомоморфизма $(x, y) \to xy$ группы $C(G)_0 \times D(G)$ в G конечно.

в) Пусть $p = d(C(G)_0)$. Тогда $p < \infty$; доказать, что существует такая компактная вполне несвязная группа D и такой гомоморфизм $i: \mathbf{Z}^p \to D$ с плотным образом, что $C(G)_0$ изоморфна $(\mathbf{R}^p \times D)/\Gamma$, где Γ — образ $\mathbf{Z}^p$ при отображении $x \mapsto (x, i(x))$ (записать $C(G)_0$ в виде проективного предела торов размерности p).

г) Предположим, что G локально связна; показать, что G — группа Ли.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Цифры в ссылках указывают последовательно главу, параграф и пункт (или упражнение).

G_o, $C(G)$, $D(G)$ IX.1.1
$N_G(H)$, $Z_G(H)$, $N(H)$, $Z(H)$ IX.1.1
$\Gamma(G)$ IX.1.2
$\tilde{D}(G)$ IX.2.3
$\mathrm{rg}\,(G)$ IX.2.4
$W_G(T)$, $W(T)$ IX.2.5
$\mathfrak{a}_{[\mathbf{R}]}$, $\mathfrak{a}_{\mathbf{R}}$, $\mathfrak{g}_{(\mathbf{C})}$, $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ IX.3.1
$\mathfrak{a}_u$, u_α, v_α IX.3.2
$\mathbf{U}(\Phi)$, $\mathbf{SU}(\Phi)$, $\mathfrak{u}(\Phi)$, $\mathfrak{su}(\Phi)$ IX.3.4
$\mathbf{U}(n, \mathbf{C})$, $\mathbf{SU}(n, \mathbf{C})$, $\mathfrak{u}(n, C)$, $\mathfrak{su}(n, \mathbf{C})$ IX.3.4
$\mathbf{O}(Q)$, $\mathbf{SO}(Q)$, $\mathfrak{o}(Q)$ IX.3.5
$\mathbf{O}(n, \mathbf{R})$, $\mathbf{SO}(n, \mathbf{R})$, $\mathfrak{o}(n, \mathbf{R})$ IX.3.5
U, V, K, θ IX.3.6
$\mathrm{X}(H)$, $\mathrm{X}(f)$ IX.4.1
$\delta(a)$ IX.4.1
$\Gamma(f)$ IX.4.2
$\langle a, X \rangle$ IX.4.2
$\tilde{\rho}$, $\tilde{V}$, $\tilde{V}_\lambda(G)$ IX.4.3
$P(\rho, T)$ IX.4.3
$\tilde{L}(\rho)$ IX.4.3
$R(G, T)$ IX.4.4
$V\alpha$, $K\alpha$, ι_α, ρ_α IX.4.4
Z_α, S_α IX.4.5
K_α IX.4.5
$R^\vee(G, T)$ IX.4.5
$N(G, T)$ IX.4.6
$D^*(G, T)$, $D_*(G, T)$ IX.4.9
$D^*(f)$, $D_*(f)$ IX.4.9
$D^*(G)$, $D_*(G)$ IX.4.9
$\mathrm{Aut}\,(G)$, $\mathrm{Aut}\,(G, T)$ IX.4.10
G_r, T_r IX.5.1

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

СОДЕРЖАНИЕ ПРЕДЫДУЩИХ ГЛАВ [1]

Глава I. Алгебры Ли

---

[1] Для удобства читателя помещаем содержание предыдущих глав книги «Группы и алгебры Ли», русский перевод которых выходил в издательстве «Мир» в 1972 (гл. IV—VI), 1976 (гл. I—III) и 1978 (гл. VII, VIII) гг.— *Прим. ред.*

§ 8. Симметрические инварианты

1. Экспоненты линейной формы. 2. Вложение $k[P]$ в $\mathrm{S}(\mathfrak{h})^*$. 3. Инвариантные многочлены. 4. Свойства групп Aut_0. 5. Центр универсальной обертывающей алгебры.

§ 9. Формула Германа Вейля

1. Характеры конечномерных $\mathfrak{g}$-модулей. 2. Размерности простых $\mathfrak{g}$-модулей. 3. Кратности весов простых $\mathfrak{g}$-модулей. 4. Разложение тензорного произведения двух простых $\mathfrak{g}$-модулей.

§ 10. Максимальные подалгебры полупростых алгебр Ли

§ 11. Классы нильпотентных элементов и $\mathfrak{sl}_2$-тройки

1. Определение $\mathfrak{sl}_2$-тройки. 2. $\mathfrak{sl}_2$-тройки в полупростых алгебрах Ли. 3. Простые элементы. 4. Главные элементы.

§ 12. Порядки Шевалле

1. Решетки и порядки. 2. Разделенные степени в биалгебре. 3. Целочисленный вариант теоремы Пуанкаре — Биркгофа — Витта. 4. Пример: многочлены с целыми значениями. 5. Несколько формул. 6. Бипорядки в универсальной обертывающей алгебре расщепленной редуктивной алгебры Ли. 7. Порядки Шевалле. 8. Допустимые решетки.

§ 13. Расщепляемые простые алгебры Ли классического типа

1. Алгебры Ли типа A_l ($l \geqslant 1$). 2. Алгебры Ли типа B_l ($l \geqslant 1$). 3. Алгебры Ли типа C_l ($l \geqslant 1$). 4. Алгебры Ли типа D_l ($l \geqslant 2$).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Уважаемый читатель!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

Монография

Никола БУРБАКИ

Группы и алгебры Ли

Научный редактор Г. М. Цукерман
Мл. научный редактор И. В. Герасимова
Художник А. Г. Антонова
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор И. М. Кренделева
Корректор В. С. Соколов

ИБ № 3443

Сдано в набор 20.06.85.
Подписано к печати 31.10.86.
Формат $60 \times 90^1/_{16}$.
Бумага кн.-журн. Печать высокая. Гарнитура латинская.
Объем бум. л. 5,5. Усл. печ. л. 11,00. Усл. кр.-отт. 11,51. Уч.-изд. л. 11,64
Изд. № 1/4020. Тираж 7 250 экз. Зак. 89. Цена 1 руб.
ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2.

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.

1 руб.

ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР •

ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ

БУРБАКИ